RMS 2021 [1375]

> *On pose*
> $$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt.$$
> **1❧** *Pour quels* $x \in \mathbb{R}$ *l'intégrale* $F(x)$ *est-elle bien définie ?*
> **2❧** *Calculer une primitive de*
> $$\left[t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right]$$
> *en posant* $t = u^2$.
> **3❧** *En déduire la valeur de* $F(1/2)$.

1❧ Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction
$$\varphi_x = \left[t \mapsto \frac{t^x}{1+t}\right]$$
est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

Pour $x < 0$, la fonction φ_x est continue seulement sur l'intervalle $]0,1[$. Lorsque t tend vers 0, on a $\varphi_x(t) \sim t^x$ et on sait que $[t \mapsto t^x]$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $x > -1$.

Par conséquent, l'intégrale $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ au sens propre et pour tout $x > -1$ en tant qu'intégrale généralisée.

2❧ La fonction $u = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et avec $u = \sqrt{t}$, on a
$$du = d(\sqrt{t}) = \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$
D'après la formule du changement de variable, pour tout $z \in\,]0,+\infty[$,
$$\int^z \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = \int^z \frac{2t}{1+t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int^{\sqrt{z}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,du.$$
Appliquons l'Astuce taupinale :
$$\int^{\sqrt{z}} \frac{2u^2}{1+u^2}\,du = 2\int^{\sqrt{z}} \frac{(1+u^2)-1}{1+u^2}\,du = 2\left(\int^{\sqrt{z}} du - \int^{\sqrt{z}} \frac{du}{1+u^2}\right)$$
$$= 2\big(\sqrt{z} - \operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big).$$

3❧ Comme $\varphi_{1/2}$ est continue sur $[0,1]$,
$$F(1/2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\big[\sqrt{z} - \operatorname{Arctan}\sqrt{z}\big]_{z=\varepsilon}^{z=1}$$
$$= 2 - \frac{\pi}{2}.$$

✍ *Comme $\pi/2 \approx 1,57$, la valeur de $F(1/2)$ est de l'ordre de $0,43$. Il est facile de vérifier que la fonction $\varphi_{1/2}$ est croissante sur $[0,1]$ et de voir que l'aire calculée est effectivement inférieure à $1/2$ et assez proche de $1/2$.*