RMS 2021 [1388]

(Énoncé adapté au programme de première année)

1❧ *On considère une fonction* f *telle que*

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}.$$

Comment choisir $f(0)$ *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

2❧ *Démontrer que la fonction*

$$g = \left[t \mapsto \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\right]$$

admet une primitive G *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

3❧ *En reliant* G *à* f*, démontrer que l'application* G *admet un prolongement continu sur* $\mathbb{R}_+$.

1❧ Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour que f soit continue en $t = 0$, il faut que $f(t)$ tende vers $f(0)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. Or, pour $t > 0$,

$$\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1,$$

donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $f(0) = 1$.

2❧ La fonction g est évidemment continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. D'après le Théorème fondamental, elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

✍ *Plus précisément, quel que soit* $x_0 > 0$*, l'application*

$$\left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *et sa dérivée est égale à* g *(c'est pourquoi il s'agit d'une* primitive *de* g*).*

3❧ On sait que G est de classe $\mathscr{C}^1$, et en particulier continue, sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le Théorème fondamental, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} G(x) - G(1) &= \int_1^x \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,dt \\ &= \big[\ell n\, t \ \operatorname{Arctan} t\big]_1^x - \int_1^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,dt \\ &= \ell n\, x \ \operatorname{Arctan} x + \int_x^1 f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Comme on a choisi $f(0)$ pour que f soit continue sur le segment $[0, 1]$, l'intégrale de f sur ce segment est bien définie et

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Par ailleurs,

$$\ell n\, x \ \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x\, \ell n\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et par conséquent $G(x)$ tend vers le réel

$$G(1) + \int_0^1 f(t)\,dt$$

lorsque x tend vers 0.

Autrement dit, la fonction G admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *Comme g est continue sur $]0, +\infty[$, il suffisait de vérifier que g est intégrable au voisinage de $t = 0$ pour en déduire que (toutes) ses primitives admettent une limite finie au voisinage de 0. Pour cela, on se contente de remarquer que*

$$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ell n\, t$$

et que ℓn est intégrable au voisinage de 0.

De la même manière, $g(t) = \mathcal{o}(t^{-3/2})$ au voisinage de $+\infty$, donc g est intégrable au voisinage de $+\infty$ et (toutes) ses primitives admettent une limite finie au voisinage de $+\infty$.