RMS 2021 [1362]

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$\forall\, x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{2^k}\,\ell n\,\frac{x}{2^k}.$$

1❧ *Étudier les variations de la fonction*

$$g = [t \mapsto t\,\ell n\, t]$$

et tracer l'allure de son graphe.

2❧ *Démontrer que, pour tout* $x > 0$*, la série* $\sum u_k(x)$ *est absolument convergente.*

3❧ *Pour tout* $x > 0$*, on pose*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

Simplifier l'expression $S(2x) - S(x)$*.*

4❧ *Soit* $A > 0$*. Démontrer qu'il existe un rang* $K_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\forall\, k \geqslant K_0,\ \forall\, x \in\,]0, A]\,, \quad \bigl|u_k(x)\bigr| \leqslant \bigl|u_k(A)\bigr|.$$

5❧ *On suppose que* f *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\forall\, x > 0, \qquad f(2x) = f(x) + x\,\ell n\, x. \tag{E}$$

Exprimer f *en fonction de* $f(0)$ *et de* S*. Conclure.*

1❧ La fonction g est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, elle tend vers 0 au voisinage de 0 (forme indéterminée de référence). De plus,

$$\forall\, t > 0, \quad g'(t) = 1 + \ell n\, t,$$

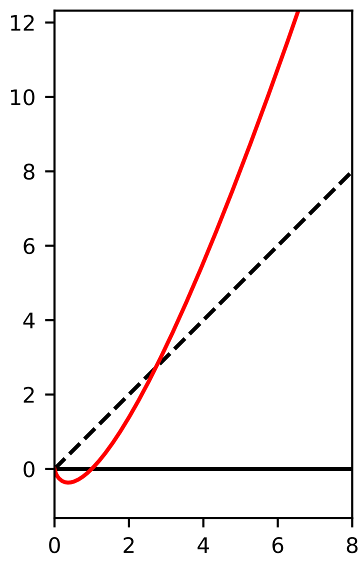
donc g est strictement décroissante sur $\left]0, e^{-1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[e^{-1}, +\infty\right[$. Enfin,

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - 0}{t - 0} = -\infty$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty,$$

donc le graphe de g présente une tangente verticale à l'origine et une branche parabolique verticale au voisinage de l'infini.



2❧ Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k(x) = \frac{x}{2^k}\bigl(-k\,\ell n\, 2 + \ell n\, x\bigr)$$

donc

$$u_k(x) \underset{k\to+\infty}{\sim} \underbrace{(-x\,\ell n\, 2)}_{C^{te}} \cdot \frac{k}{2^k}.$$

Par croissances comparées (de k^α avec 2^k), on en déduit que

$$u_k(x) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

et donc que la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente.

✍ *On peut aussi remarquer que*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = 0 < 1$$

et conclure en appliquant la règle de D'Alembert.

3❧ On remarque que, pour tout $x > 0$ et tout $k \geqslant 2$,

$$u_k(2x) = g\left(\frac{2x}{2^k}\right) = g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) = u_{k-1}(x).$$

Par conséquent,

$$S(2x) = u_1(2x) + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(2x) = u_1(2x) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(x) = x\ln x + S(x).$$

Donc

$$\forall\, x > 0, \qquad S(2x) - S(x) = x\ln x.$$

4❧ Pour $k \geqslant K_0$ (quel que soit cet entier K_0) et $0 < x \leqslant A$,

$$0 < \frac{x}{2^k} \leqslant \frac{A}{2^{K_0}} \quad \text{et} \quad \left|u_k(x)\right| = \left|g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|$$

On a étudié la fonction g plus haut : si $2^{-K_0}A \leqslant e^{-1}$, alors la fonction g est négative et décroissante sur $\left]0, 2^{-K_0}A\right]$, donc $-g$ est positive et croissante sur $\left]0, 2^{-K_0}A\right]$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\forall\, k \geqslant K_0,\ \forall\, 0 < x \leqslant A, \quad \left|u_k(x)\right| &= -g\left(\frac{x}{2^k}\right)\\ &\leqslant -g\left(\frac{A}{2^k}\right) = \left|u_k(A)\right|.\end{aligned}$$

✍ *Comme la série $\sum u_k(A)$ est absolument convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $]0, A]$ (quel que soit $A > 0$). Les fonctions u_k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la somme S est continue sur*

$$\bigcup_{A>0}]0, A] = \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, toutes les fonctions u_k ont une limite finie au voisinage de 0 (cette limite est nulle), donc la convergence normale au voisinage de 0 prouve que la somme S admet elle aussi une limite finie au voisinage de 0 et que

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(Théorème d'interversion des limites).

5❧ D'après l'hypothèse faite sur f,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = u_{k+1}(x)$$

et donc (sommation télescopique pour $0 \leqslant k < n$)

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x).$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en 0 et par composition de limites,

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) - f(0) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell(x) = S(x)$$

puisque $2^{-n}x$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le réel x restant fixé).

❧ On vient de démontrer que toute solution f continue sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation fonctionnelle (E) est nécessairement de la forme

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = f(0) + S(x).$$

❧ Réciproquement, quel que soit le réel C, la fonction f définie par $f(0) = C$ et par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = C + S(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ (puisque S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de 0). De plus, cette fonction f vérifie la relation

$$\forall\, x > 0, \quad f(2x) = C + S(2x) = C + S(x) + x\,\ell n\, x = f(x) + x\,\ell n\, x,$$

donc f est bien une solution de (E) qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

❧ On a ainsi démontré que f est une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = C + S(x).$$

(On rappelle que cette constante C est en fait égale à $f(0)$.)