RMS 2021 [1301]

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1❧ *Quel est le rang de M ?*
2❧ *La matrice M est-elle inversible ?*
3❧ *Quelle est la dimension du noyau de M ? Donner une base de ce sous-espace.*
4❧ *Calculer M^2 et M^3. En déduire un polynôme annulateur de M.*
5❧ *Déterminer les éléments propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?*

1❧ Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de M est au moins égal à 2. Les quatre premières colonnes sont égales, donc le rang de M est au plus égal à 2. Le rang de M est donc égal à 2.

2❧ On sait qu'une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son rang est égal au nombre de ses colonnes (Théorème du rang). D'après la question précédente, $\operatorname{rg} M < 5$, donc M n'est pas inversible.

3❧ D'après le Théorème du rang, le nombre de colonnes d'une matrice est la somme du rang de cette matrice et de la dimension de son noyau. Par conséquent,

$$\dim \operatorname{Ker} M = 5 - 2 = 3.$$

Il reste à trouver une famille libre de trois vecteurs dans $\operatorname{Ker} M$.

On connaît trois relations de liaison évidentes entre les colonnes de M :

$$C_1 - C_2 = C_2 - C_3 = C_3 - C_4 = 0.$$

Par conséquent, le noyau de M contient les trois vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et comme ces trois vecteurs forment clairement une famille libre (les colonnes sont échelonnées), on a trouvé une base de $\operatorname{Ker} M$.

4❧ On trouve :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

et on en déduit facilement que

$$M^3 - M^2 = 4M.$$

Autrement dit, la matrice M admet pour polynôme annulateur

$$X^3 - X^2 - 4X = X(X^2 - X - 4) = X(X - \alpha)(X - \beta)$$

avec

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

✍ *Pour la matrice M, c'est un polynôme annulateur unitaire. D'après la matrice M^2, la matrice M n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur à 2, donc ce polynôme annulateur est en fait le polynôme minimal de M.*

$\boxed{5❧}$ La matrice M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

✍ *Par ailleurs, on a calculé son polynôme minimal, qui est bien scindé à racines simples.*

❧ Les valeurs propres de M sont les racines de son polynôme minimal, donc

$$\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha, \beta\}$$

et on a déjà calculé une base du sous-espace propre $\operatorname{Ker} M$.

❧ Comme M est diagonalisable,

$$5 = \dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Ker}(M - \alpha I_5) + \dim \operatorname{Ker}(M - \beta I_5)$$

et comme α et β sont des valeurs propres de M,

$$\dim \operatorname{Ker}(M - \alpha I_5) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(M - \beta I_5) \geqslant 1.$$

Par conséquent, les deux sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(M - \alpha I_5)$ et $\operatorname{Ker}(M - \beta I_5)$ sont des droites vectorielles.

❧ Comme d'habitude en pareil cas, on va caractériser les deux sous-espaces propres par un seul calcul, puisqu'il sont dirigés par des vecteurs "conjugués".

Analyse — Pour $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - \lambda I_5)$$

équivaut à

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il **faut** donc que

$$x_5 = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \lambda x_4$$

c'est-à-dire qu'il existe un scalaire $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Synthèse — Comme λ est une valeur propre de M et que le sous-espace propre associé à λ est une droite, il est inutile d'aller plus loin ! Pour $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$,

$$\operatorname{Ker}(M - \lambda I_5) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

✍ *En exploitant la cinquième ligne de la matrice, on aurait obtenu la relation*

$$4 + \lambda = \lambda^2,$$

c'est exactement ce que dit le polynôme minimal de M *!*

✍ *La matrice* M *est symétrique réelle et le Théorème spectral nous assure que les sous-espaces propres de* M *sont deux à deux orthogonaux. On le vérifie facilement en tenant compte du fait que* $\alpha\beta = -4$ *(d'après le polynôme minimal).*