RMS 2021 [1399]

1❧ *Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de*

$$\frac{1}{x+i}.$$

2❧ *En déduire les solutions de l'équation*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad y'(x) + \frac{1}{2(x+i)}y(x) = 0. \tag{E}$$

3❧ *Démontrer que l'intégrale*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4❧ *Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.*

5❧ *En déduire que f est une solution de l'équation (E).*

6❧ *Démontrer que l'application*

$$J = \left[\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\right]$$

est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Exprimer J en fonction de f et en déduire le signe de J.

1❧ Comme x est *réel*,

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{1+x^2}$$

et donc

$$\mathfrak{Re}\,\frac{1}{x+i} = \frac{x}{1+x^2},\qquad \mathfrak{Im}\,\frac{1}{x+i} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2❧ Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre : on connaît une formule pour cela !

D'après la question précédente, une primitive de $\frac{1}{x+i}$ est

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - i\operatorname{Arctan} x$$

donc y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) &= \lambda\,\exp\left[\frac{-1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{i}{2}\operatorname{Arctan} x\right]\\ &= \frac{\lambda}{\sqrt[4]{1+x^2}}\,\exp\left(\frac{i\operatorname{Arctan} x}{2}\right).\end{aligned}$$

✍ *On peut remarquer que $\lambda = y(0)$.*

3❧ Pour $x \in \Omega = \mathbb{R}$ et $t \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $x \in \Omega$, il est clair que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I ; que

$$\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t}) \quad\text{et que}\quad \varphi(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Par comparaison à des fonctions intégrables, on a démontré que $[t \mapsto \varphi(x,t)]$ était intégrable sur I pour tout $x \in \Omega$ et donc que l'intégrale $f(x)$ était bien définie sur $\Omega = \mathbb{R}$.

4❧ Il est clair que, pour tout $t \in I$, l'application $[x \mapsto \varphi(x,t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{ixt}e^{-t}.$$

Il est tout aussi clair que l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert I et que

$$\forall\,(x,t) \in \Omega \times I, \qquad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}e^{-t}.$$

Le majorant étant une fonction intégrable de référence sur I (cf cours sur la fonction Γ), on en déduit que, pour tout $x \in \Omega$, l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I. Mieux, le majorant étant indépendant de $x \in \Omega$ (condition de domination), on peut appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$: la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{ixt}\,dt.$$

5❧ Nous allons intégrer par parties : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right] = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) + \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}.$$

L'expression

$$\left|\frac{i\sqrt{t}}{ix-1}\,e^{(ix-1)t}\right| = \sqrt{\frac{t}{1+x^2}}\,e^{-t}$$

tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$. De plus, l'application $\left[t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial (}x,t)\right]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt$$

est convergente et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 &= f'(x) + \int_0^{+\infty} \frac{i}{(ix-1)2\sqrt{t}}\,e^{(ix-1)t}\,dt \\ &= f'(x) + \frac{i}{2(ix-1)}f(x) \\ &= f'(x) + \frac{1}{2(x+i)}f(x).\end{aligned}$$

La fonction f est bien une solution de (E).

❧ Le scalaire λ est égal à $f(0) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\,\exp\left(\frac{i\,\mathrm{Arctan}\,x}{2}\right).$$

6❧ Nous allons à nouveau appliquer le Théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Pour tout $t \in I =]0, +\infty[$ et tout $\alpha \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\psi(\alpha, t) = \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application $[t \mapsto \psi(\alpha, t)]$ est continue sur l'intervalle ouvert I. Comme

$$\psi(\alpha, t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad \psi(\alpha, t) \underset{t \to 0}{\sim} \sqrt{t},$$

l'application $[t \mapsto \psi(\alpha, t)]$ est bien intégrable sur I et l'application J est donc bien définie sur I.

Avec le changement de variable affine $u = \alpha t$,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin(u/\alpha)}{\sqrt{u}} \, du$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathfrak{Im}\big(f(1/\alpha)\big) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+\alpha^2}} \sin \frac{\operatorname{Arctan}(1/\alpha)}{2}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \operatorname{Arctan} 1/\alpha < \pi/2$, le sinus est positif et $I(\alpha)$ est donc (strictement) positif pour tout $\alpha > 0$.

✍ *On peut aussi exprimer $I(\alpha)$ comme la somme d'une série convergente à l'aide de la relation de Chasles.*

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-\alpha t} \sin t}{\sqrt{t}} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha(u+k\pi)} \sin(u+k\pi)}{\sqrt{u+k\pi}} \, du \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-k\alpha\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha u} \sin u}{\sqrt{u+k\pi}} \, du. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que

$$e^{-k\alpha\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-\alpha u} \sin u}{\sqrt{u+k\pi}} \, du$$

tend vers 0 en décroissant quand k tend vers $+\infty$. Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étant vérifiées, on sait que la somme $I(\alpha)$ est du signe du premier terme et donc positive.