RMS 2021 [1395]

(Énoncé adapté au programme de première année)

On considère l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0. \tag{E}$$

1❧ *Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un espace vectoriel.* ***On admettra*** *dans la suite de cet exercice que la dimension de cet espace vectoriel est égale à 2.*

2❧ *Quelles sont les solutions de (E) de la forme $[t \mapsto t^r]$? En déduire une base de l'espace $\mathcal{S}$.*

3❧ *Parmi les solutions de (E), quelles sont les fonctions qui admettent une limite finie au voisinage de $t = 0$?*

4❧ *Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ par l'application*

$$\Phi = \left[P \mapsto X^2P'' - 2XP' + 2P\right].$$

5❧ *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme P pour que l'équation différentielle*

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = P(t) \tag{E'}$$

admette une solution polynomiale.

1❧ Par définition, tout élément de $\mathcal{S}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, donc $\mathcal{S}$ est contenu dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

Comme l'équation différentielle (E) est linéaire et homogène, la fonction nulle est une solution et $\mathcal{S}$ contient donc le vecteur nul de l'espace $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

Il reste à vérifier que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire : quelles que soient les fonctions f et g qui vérifient l'équation (E) et quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $h = \lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
t^2h''(t) &- 2th'(t) + 2h(t) \\
&= t^2[\lambda f''(t) + g''(t)] - 2t[\lambda f'(t) + g't()] + 2[\lambda f(t) + g(t)] \\
&= \lambda\left[t^2f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t)\right] + \left[t^2g''(t) - 2tg'(t) + 2g(t)\right] \\
&= \lambda \times 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est un sous-espace de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

✍ *Il en va de même pour toutes les équations différentielles homogènes (quels que soient les coefficients, quel que soit l'ordre de l'équation).*

2❧ La fonction $x = [t \mapsto t^r]$ est une solution de (E) si, et seulement si,

$$\forall\, t > 0, \quad t^2 \cdot r(r-1)t^{r-2} - 2t \cdot rt^{r-1} + 2t^r = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t > 0, \quad [r^2 - 3r + 2]t^r = 0$$

soit : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Les racines de cette équation sont 1 et 2. Par conséquent, les fonctions $[t \mapsto t]$ et $\left[t \mapsto t^2\right]$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

❧ On a admis que $\dim \mathcal{S} = 2$ et on vient de trouver deux vecteurs dans $\mathcal{S}$. Comme ces fonctions ne sont pas proportionnelles, elles forment une famille libre (de *deux* vecteurs dans un espace de dimension *deux*), donc une base de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \text{Vect}([t \mapsto t]\,,\ \left[t \mapsto t^2\right]).$$

$\boxed{3}$❧ D'après la question précédente, une fonction x est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux scalaires a et b (les constantes d'intégration) tels que

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = at + bt^2.$$

Donc *toutes* les solutions de (E) ont une limite finie au voisinage de $t = 0$ (et cette limite est nulle).

$\boxed{4}$❧ D'après les calculs menés plus haut,

$$\forall\, r \in \mathbb{N}, \quad \Phi(X^r) = (r^2 - 3r + 2)X^r = (r-1)(r-2)X^r.$$

$\boxed{5}$❧ Le polynôme Q est une solution de (E′) si, et seulement si,

$$\Phi(Q) = P.$$

L'équation différentielle (E′) admet donc une solution polynomiale si, et seulement si, le second membre P appartient à l'image de Φ. D'après la question précédente,

$$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Vect}(1, X^3, X^4, \dots) = \operatorname{Vect}(X^r,\ r \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}).$$