RMS 2021 [1331]

(Énoncé adapté au programme de première année)

$\boxed{\textbf{1}}$ *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, une matrice inversible. Démontrer que $M^\top$ est inversible et que*

$$(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top.$$

$\boxed{\textbf{2}}$ *On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$A.A^\top.A = I_n.$$

❦ *Démontrer que A est inversible.*
❦ *En déduire que A est symétrique.*
❦ *On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}$ est un scalaire tel qu'il existe une colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$. Démontrer que $\lambda = 1$.*

$\boxed{\textbf{1}}$ Comme M est inversible, il existe une matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$MP = PM = I_n.$$

En transposant cette relation, on trouve

$$P^\top.M^\top = M^\top.P^\top = I_n,$$

ce qui prouve d'une part que $M^\top$ est inversible et d'autre part que l'inverse de $M^\top$ est $P^\top$. Autrement dit,

$$(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top.$$

$\boxed{\textbf{2}}$ Comme A est une matrice carrée,

$$1 = \det(I_n) = \det(A.A^\top.A) = (\det A)^2.\det(A^\top).$$

Mais une matrice et sa transposée ont même déterminant, donc

$$(\det A)^3 = 1.$$

En particulier, $\det A \neq 0$, donc la matrice A est inversible.

❧ D'après la relation étudiée (et le Théorème du rang), la matrice A est inversible et son inverse $A^\top.A$ est symétrique :

$$(A^\top.A)^\top = A^\top.(A^\top)^\top = A^\top.A.$$

D'après la première question, la matrice A est elle aussi symétrique (en tant qu'inverse d'une matrice symétrique).

❧ Si $AX = \lambda.X$, alors

$$X = I_n.X = (A.A^\top.A)X = A^3X$$

(puisque A est symétrique) et donc

$$X = A^2(AX) = \lambda.A^2X = A(AX) = \lambda^2.AX = \lambda^3X.$$

Il faut donc que

$$(\lambda^3 - 1).X = 0$$

et comme X n'est pas la colonne nulle (par hypothèse), on en déduit que $\lambda^3 = 1$. Le seul scalaire *réel* possible est donc $\lambda = 1$.

✍ *Si on cherchait un scalaire complexe, il faudrait tenir compte des deux autres racines cubiques de l'unité : j et j^2.*