RMS 2021 [1401]

(Énoncé adapté au programme de première année)

On considère l'équation différentielle

$$\forall\, t < 1, \quad (1-t)x'(t) - x(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{E}$$

$\boxed{1}$ *Résoudre l'équation* (E).

$\boxed{2}$ *Soit* f*, une solution de* (E).

❦ *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction* f *admet un développement limité à l'ordre* n *au voisinage de* $t = 0$.

❦ *On suppose que*

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n).$$

Démontrer que f' *admet un développement limité à l'ordre* $(n-1)$ *au voisinage de* $t = 0$ *:*

$$f'(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k + o(t^{n-1}).$$

Exprimer les coefficients $b_0, \dots, b_{n-1}$ *en fonction des coefficients* $a_0, \dots, a_n$.

❦ *Exprimer* a_0, a_1, a_2 *en fonction de* $f(0)$.

❦ *En supposant que* $f(0) = 0$*, tracer l'allure du graphe de* f *au voisinage de* $t = 0$.

$\boxed{1}$ Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre : on sait résoudre l'équation homogène et on fait ensuite varier la constante pour trouver la solution générale de l'équation.

La fonction x est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, t < 1, \qquad x(t) = \lambda \cdot \frac{1}{1-t}.$$

La fonction $x_0 = [t \mapsto K(t)x(t)]$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall\, t < 1, \qquad (1-t)\cdot\left[K'(t)\cdot\frac{1}{1-t}\right] = \frac{1}{1-t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t < 1, \qquad K(t) = K_0 - \ell n(1-t).$$

La fonction x est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe un réel K_0 tel que

$$\forall\, t < 1, \quad x(t) = \frac{K_0}{1-t} - \frac{\ell n(1-t)}{1-t}.$$

$\boxed{2}$ Il est clair que toute solution f de l'équation (E) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$. D'après la formule de Taylor-Young, une telle fonction f admet un développement limité à un ordre n quelconque au voisinage de $t = 0$ et

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + o(t^n).$$

❧ Par unicité du développement limité, on a donc $a_0 = f(0)$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, il en va de même pour sa dérivée f', qui admet aussi un développement limité à l'ordre $(n-1)$ au voisinage de $t=0$:

$$f'(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!}\, t^k + o(t^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}\, t^k + o(t^{n-1}).$$

Par unicité du développement limité à nouveau, on a donc

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad b_k = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = a_{k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{k!} = (k+1)a_{k+1}.$$

❧ En particulier pour $n=2$, on a

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(t^2) \quad \text{et} \quad f'(t) = a_1 t + 2a_2 t + o(t).$$

En injectant dans l'équation (E),

$$\big((a_1 + 2a_2 t) - a_1 t + o(t)\big) - \big(a_0 + a_1 t + o(t)\big) \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$$

et on en déduit (unicité du développement limité) que :

$$a_1 - a_0 = 1 \quad \text{et} \quad 2(a_2 - a_1) = 1$$

c'est-à-dire :

$$a_1 = 1 + a_0 \quad \text{et} \quad a_2 = a_1 + \frac{1}{2} = a_0 + \frac{3}{2}.$$

La formule de Taylor nous rappelle enfin que $a_0 = f(0)$.

❧ Avec $f(0) = 0$, il reste donc $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 3/2$, donc

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} t + \frac{3t^2}{2} + o(t^2).$$

Le graphe de la fonction f passe donc par l'origine, admet $y = x$ pour tangente à l'origine et est situé au-dessus de sa tangente (puisque le terme en t^2 est positif).