RMS 2021 [1320]

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$, *une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien* E. *On suppose que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2.$$

1❧ *Démontrer que* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille orthogonale de* E.

2❧ *Soit* $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^{\perp}$. *Démontrer que* $x = 0_E$.

3❧ *Démontrer que* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* E.

1❧ Prenons $x = e_j$: comme e_j est unitaire,

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2$$

et donc

$$\sum_{i \neq j} \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, e_j \,|\, e_i \,\rangle = 0.$$

La famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est donc orthogonale.

2❧ Si x est orthogonal au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0.$$

Par conséquent $x = 0_E$.

3❧ On sait maintenant que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthonormée, et donc libre.

Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et on a démontré que $F^{\perp} = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = F$, ce qui prouve que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une famille génératrice de E.

Finalement, la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.

✍ *On a démontré en particulier que* $\dim E = n$.