RMS 2021 [1402]

(Énoncé adapté au programme de première année)

1 *Pour tout* $t > 0$*, on pose*

$$f(t) = \frac{1}{t}\exp(-1/t).$$

Peut-on choisir $f(0)$ *de telle sorte que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}_+$ *?*
Si oui, la fonction f *est-elle dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

2 *Pour tout* $x > 0$*, on pose*

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Démontrer que h *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$*.*

3 *Démontrer que* $y(x) = e^{1/x}h(x)$ *vérifie l'équation différentielle suivante.*

$$\forall\, x > 0, \quad x^2y'(x) + y(x) = x$$

Quelles sont les solutions de cette équation sur $]0, +\infty[$ *?*

4 *Démontrer que*

$$\forall\, A > 0, \quad 0 \leqslant \int_0^A e^{-u}\,du \leqslant 1.$$

5 *Soient* $0 < \varepsilon < x$*. En effectuant le changement de variable*

$$t = \frac{x}{1+ux},$$

démontrer que

$$e^{1/x}\int_\varepsilon^x f(t)\,dt = x\int_0^{1/\varepsilon - 1/x} \frac{e^{-u}}{1+xu}\,du.$$

6 *En déduire que*

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant e^{1/x}h(x) \leqslant x.$$

1 Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$).

Comme $1/t$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives et que ue^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$, alors $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par valeurs positives (composition de limites).

Par conséquent, en choisissant $f(0) = 0$, on définit un prolongement de f qui est continu sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $t > 0$, on a alors

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{1}{t^2}\exp(-1/t)$$

et comme $u^2\exp(-u)$ tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$, on en déduit (à nouveau par composition de limites) que le prolongement f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2 Comme f est continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, on déduit du Théorème fondamental que h est une primitive de f sur I : la fonction h est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $h'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

3 Par produit, la fonction y est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad y'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{1/x}h(x) + e^{1/x}h'(x) = \frac{-1}{x^2}y(x) + \frac{1}{x}.$$

Ainsi,
$$\forall\, x > 0, \quad x^2 y'(x) + y(x) = x.$$

❧ Puisqu'on connaît déjà une solution particulière de cette équation linéaire, il suffit maintenant de résoudre l'équation homogène pour en déduire la solution générale.

L'équation homogène peut aussi s'écrire
$$\forall\, x > 0, \qquad y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = 0$$
et comme une primitive de $1/x^2$ est $-1/x$, la solution générale de l'équation homogène s'écrit
$$\lambda \exp(-1/x).$$

Par conséquent, la fonction y est une solution de l'équation "complète" si, et seulement si, il existe un réel λ tel que
$$\forall\, x > 0, \qquad y(x) = \lambda e^{-1/x} + e^{1/x} h(x).$$

4❧ Pour tout $A > 0$,
$$\int_0^A e^{-u}\, du = 1 - e^{-A} \in [0, 1].$$

5❧ Comme $0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant x$ et
$$t = \frac{x}{1+ux} \iff u = \frac{x-t}{xt} = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}.$$
L'application
$$\left[t \mapsto u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right]$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante de $[\varepsilon, x]$ sur $[0, 1/\varepsilon - 1/x]$, on peut donc l'utiliser pour appliquer la formule du changement de variable avec
$$dt = \frac{d}{du}\Big(\frac{x}{1+xu}\Big)\, du = \frac{-x^2}{(1+xu)^2}\, du.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} e^{1/x} \int_\varepsilon^x f(t)\, dt &= e^{1/x} \int_{1/\varepsilon - 1/x}^{1/x - 1/x} \frac{1+ux}{x} \exp\Big(\frac{-(1+ux)}{x}\Big) \frac{-x^2}{(1+xu)^2}\, du \\ &= x \int_0^{1/\varepsilon - 1/x} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du. \end{aligned}$$

6❧ Comme f est positive, il est clair que $h(x)$ est positif pour tout $x > 0$ (on intègre bornes croissantes).

D'autre part, pour tout $x > 0$, en posant $A = 1/\varepsilon - 1/x$,
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant \int_0^{1/\varepsilon - 1/x} \frac{e^{-u}}{1+xu}\, du \leqslant \int_0^{1/\varepsilon - 1/x} e^{-u}\, du \leqslant 1$$
et donc, d'après l'expression trouvée à la question précédente,
$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant e^{1/x} \int_\varepsilon^x f(t)\, dt \leqslant x.$$
Comme f est continue sur $[0, +\infty[$ (fermé en 0 !), on en déduit que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x f(t)\, dt = h(x)$$
et donc que
$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant e^{1/x} h(x) \leqslant x$$

puisque les inégalités larges sont conservées par passage à la limite.

✍ *Pour tout $\lambda \neq 0$, l'expression $\lambda e^{1/x}$ tend vers l'infini ($\pm\infty$ selon le signe de λ) lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.*

La solution $e^{1/x}h(x)$ (c'est-à-dire le cas $\lambda = 0$) est donc la seule solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad x^2 y'(x) + y(x) = x$$

qui reste bornée au voisinage de l'origine.