RMS 2021 [1332]

> *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{R})$, *une matrice telle que*
> $$A^2 + A^\top = I_n.$$
> **1❧** *Démontrer que* $A = I_n - (A^\top)^2$.
> **2❧** *En déduire que*
> $$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$
> **3❧** *Démontrer que* $\det(I_n - A^\top) \neq 0$. *En déduire que* $(I_n - A)$ *est inversible.*
> **4❧** *Démontrer que la matrice* A *est symétrique.*

1❧ On part de la relation donnée, qu'on transpose :

$$I_n = I_n^\top = (A^2)^\top + (A^\top)^\top = (A^\top)^2 + A.$$

2❧ On remplace $A^\top$ dans cette relation par $I_n - A^2$ (selon l'hypothèse de l'énoncé) :

$$I_n = (I_n - A^2)^2 + A$$

et, par différence, on en déduit que

$$\begin{aligned}
0_n &= (I_n - A^2)^2 + (A - I_n) \\
&= (I_n - A)^2(I_n + A)^2 - (I_n - A) && (\star) \\
&= (I_n - A)\big[(I_n - A)(I_n + A)^2 - I_n\big] \\
&= (I_n - A)(A^3 + A^2 - A) && (\star) \\
&= A(I_n - A)(A^2 + A - I_n) && (\star)
\end{aligned}$$

On a utilisé plusieurs fois $(\star)$ le fait que deux polynômes en A commutent toujours, ce qui permet de factoriser facilement ou d'appliquer la formule du binôme pour développer.

Comme la matrice A est supposée inversible, on en déduit que

$$(I_n - A)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$

✍ *L'anneau* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *des matrices carrées n'est pas intègre, il ne suffit pas que la matrice* A *soit distincte de* 0_n *pour simplfier l'égalité !*

3❧ Deux polynômes en $A^\top$ commutent toujours. On peut donc déduire de la première question que :

$$A = I_n - (A^\top)^2 = (I_n - A^\top)(I_n + A^\top).$$

Par conséquent, comme A est supposée inversible,

$$\det A = \det(I_n - A^\top)\det(I_n + A^\top) \neq 0,$$

ce qui prouve que $\det(I - A^\top) \neq 0$ et donc que $(I_n - A^\top)$ est inversible.

✍ *Il est utile de retenir une propriété un peu plus générale que celle qu'on vient d'établir :* si un produit de matrices carrées est inversible, alors chaque facteur est lui-même inversible.

❧ On sait qu'une matrice et sa transposée ont même rang. Or

$$(I_n - A^\top) = (I_n - A)^\top$$

(puisque la matrice I_n est symétrique). Comme $(I_n - A^\top)$ est inversible, on en déduit que $(I_n - A)$ est inversible.

✍ *Autrement dit : le scalaire 1 n'est pas une valeur propre de A.*

$\boxed{\textbf{4}}$ Comme la matrice $(I_n - A)$ est inversible et que

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n,$$

on en déduit que

$$A^2 + A - I_n = 0_n.$$

En comparant cette égalité avec l'hypothèse de départ,

$$A = I_n - A^2 = A^\top$$

donc la matrice A est bien symétrique.

✍ *La matrice A, symétrique à coefficients réels, est donc diagonalisable (Théorème spectral).*