2
Calcul matriciel par blocs

1. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, le choix d'une base $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de l'espace de départ E et d'une base $\mathscr{C} = (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de l'espace d'arrivée F permet de définir la matrice

$$A = \big(f_i^*(e_j)\big)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

qui représente u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Cette matrice est aussi notée $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Toutes les propriétés algébriques de u (rang, noyau, image, inversibilité, trace, déterminant...) peuvent se déduire de cette matrice A.

2. Inversement, étant donnée une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut choisir deux espaces vectoriels E et F, de dimensions respectives p et n, munir ces deux espaces de bases, notées respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$; il existe alors une, et une seule, application linéaire $u \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

et on peut alors interpréter les propriétés de A à l'aide de l'application linéaire u.

I
Noyau et image d'une matrice

3. Bases canoniques
On note traditionnellement $(E_1, \dots, E_n)$, la base canonique de l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes.
3.1 On identifie couramment les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, au sens où la même notation x est utilisée pour le vecteur

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

et pour la matrice colonne

$$x = x_1E_1 + \cdots + x_nE_n \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

qui représente ce vecteur dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
3.2 On note $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$, la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de telle sorte que la matrice

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

peut être décomposée en

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}.$$

3.3 ➞ *Si E_i et E_j ont même taille, alors*

$$E_i^\top.E_j = \delta_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

3.4 ➞ *Si $E_i \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $E_j \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors*

$$E_i.E_j^\top = E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

3.5 ➞ *Si $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,\ell} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors*

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

4. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4.1 Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, la j-ième colonne de A est égale à

$$C_j = AE_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}E_i \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

4.2 Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la i-ième ligne de A est égale à

$$L_i = E_i^\top.A = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_j^\top \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K}).$$

5. ✍ *On suppose que les espaces $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont rapportés à leurs bases canoniques respectives.*
*L'**application linéaire canoniquement associée** à une matrice A de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ représentée par la matrice A.*

6. Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$[X \mapsto AX] : \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

est une application linéaire et sa matrice relative aux bases canoniques de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice A.

7. ✍ *L'**image** de $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le sous-espace de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par la famille des colonnes de A.*

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(AE_1, \dots, AE_p) = \big\{AX,\ X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})\big\}$$

8. Le ***rang*** de la matrice A est donc le rang de la famille de ses colonnes :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p).$$

On le calcule aisément par des opérations de pivot (aussi bien sur les lignes que sur les colonnes).

9. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
9.1 ✍ *Le **noyau** de A est le sous-espace de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ défini par*

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff AX = 0.$$

9.2 Trouver un vecteur non nul du noyau de A revient à trouver un hyperplan contenant l'image de $A^\top$.

$$A.X_0 = 0 \iff X_0^\top.A^\top = 0$$

9.3 Le noyau de A est réduit au vecteur nul si, et seulement si, l'application linéaire canoniquement associée à A est injective.
9.4 ➞ *Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.*

10. Méthode
Les vecteurs du noyau de A sont en bijection avec les relations de liaison entre les colonnes de A au sens où la matrice colonne

$$X = \alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \cdots + \alpha_pE_p$$

appartient à $\operatorname{Ker} A$ si, et seulement si, les colonnes $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de A sont liées par la relation [**4**]

$$AX = \alpha_1C_1 + \alpha_2C_2 + \cdots + \alpha_pC_p = 0.$$

La connaissance des relations de liaison entre les colonnes de A permet également d'extraire une base de $\operatorname{Im} A$ de la famille génératrice $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$.

Entraînement

11. Lemme d'Hadamard
Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice à ***diagonale fortement dominante*** :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|,$$

alors [**9.4**] elle est inversible.

II

Calculs algébriques par blocs

12. Étant donnés un endomorphisme u de E et une décomposition de E en somme directe

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k,$$

la donnée d'une base $\mathscr{B} = \oplus_{k=1}^{n} \mathscr{B}_k$ de E adaptée à cette décomposition conduit à lire la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ par blocs.

13. ✍ *Une matrice* $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ *est* **écrite par blocs** *lorsque*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les **blocs diagonaux** *sont des matrices carrées :*

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad A_{i,i} \in \mathfrak{M}_{d_i}(\mathbb{K}).$$

13.1 Quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le bloc $A_{i,j}$ appartient à l'espace $\mathfrak{M}_{d_i,d_j}(\mathbb{K})$ et

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d.$$

14. ➙ **Trace**
Avec les notations [**13**],

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} A_{i,i}.$$

15. Combinaison linéaire et produit par blocs
Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$, décomposées en blocs :

$$A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \qquad B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

On suppose que, quels que soient les indices i et j, les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ ont mêmes nombres de lignes et de colonnes.

15.1

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda A + B = \big(\lambda A_{i,j} + B_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

15.2 Quels que soient les indices i et j, les produits $A_{i,k}B_{k,j}$ sont bien définis pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ et leur taille ne dépend pas de k.

15.3

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

16. Transposition
Si la matrice A est décomposée en blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors sa transposée est décomposée en blocs de mêmes tailles :

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top & \cdots & A_{n,1}^\top \\ A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top & \cdots & A_{n,2}^\top \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,n}^\top & A_{2,n}^\top & \cdots & A_{n,n}^\top \end{pmatrix}.$$

Extension aux matrices quelconques

17. L'écriture d'une matrice par blocs ne se limite pas aux matrices carrées : toute matrice peut être écrite par blocs. De même, il n'est pas nécessaire que le nombre de lignes de blocs et le nombre de colonnes de blocs soient égaux.

17.1 Si $A \in \mathfrak{M}_{N,P}(\mathbb{K})$, on peut considérer que A représente une application linéaire de E (espace de dimension P) dans F (espace de dimension N) relativement à deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ adaptées à deux décompositions en somme directe.

$$E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j \qquad F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

17.2 La forme générale d'une matrice écrite par blocs est donc

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les blocs $A_{i,\cdot}$ ont tous le même nombre de lignes (par ex. d_i) et les blocs $A_{\cdot,j}$ ont tous les même nombre de colonnes (par ex. δ_j).

17.3 Le nombre de lignes de la matrice A est égal à

$$N = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

et le nombre de colonnes est égal à

$$P = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_p.$$

18. Quelles que soient la taille de la matrice, carrée ou non, et la manière de l'écrire par blocs, les règles de calcul pour les combinaisons linéaires et les multiplications sont toujours les mêmes. Il ne s'agit en fait que d'une manière de simplifier l'écriture des calculs matriciels — rien de nouveau !

Entraînement

19. Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$U = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

Calculer UV et VU. →[**64**]

20. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. La dimension du noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}$$

est égale à $2 \dim \operatorname{Ker} A$. Calculer B^2.

21. Soient $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix}$. Alors

$$M^\top.M = \begin{pmatrix} 1 + C^\top.C & 0 \\ 0 & I_n + C.C^\top \end{pmatrix}.$$

22. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$. Alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

23. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On suppose qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P(A) = 0$. Expliciter un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(B) = 0$.

24. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Calculer les puissances de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \qquad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A).B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

25. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ I_n & A \end{pmatrix}$.

1. Donner une base du noyau de B. La matrice B est-elle inversible ? →[44]
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} (2A)^k.A & (2A)^k.A^2 \\ (2A)^k.I_n & (2A)^k.A \end{pmatrix}.$$

26. Soient $J = (\delta_{i,n+1-j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A = \begin{pmatrix} I_n & J \\ J & I_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^{k+1} = 2^k \cdot A$.
2. Pour $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le noyau de A contient la colonne

$$\begin{pmatrix} -JY \\ Y \end{pmatrix}.$$

Le rang de A est égal à n.

27. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$.

1. Expliciter une base de $\operatorname{Ker} M$ en fonction d'une base de $\operatorname{Ker} A$. Procéder de même avec les images. En déduire que

$$\operatorname{rg} M = 2 \operatorname{rg} A.$$

2. Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible. Démontrer que les matrices

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q & Q \\ 0_n & Q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}$$

sont inversibles et que

$$Q_0^{-1} M Q_0 = Q_1^{-1} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix} Q_1.$$

28. Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} (A+I_n)^k & 0_n \\ 0_n & (A+I_n)^k \end{pmatrix} \times B.$$

2. Pour tout $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la colonne $\begin{pmatrix} -AY \\ Y \end{pmatrix}$ appartient au noyau de B. Le rang de B est inférieur à n.
3. S'il existe une matrice colonne $X_0 \neq 0$ dans $\operatorname{Ker}(A + I_n)$, alors la colonne

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $\operatorname{Ker} B^2$ mais pas à $\operatorname{Ker} B$.

III

Opérations de pivot

29. Les ***opérations élémentaires*** de l'algorithme du pivot sont au nombre de trois :

29.1 ✍ *Les* **transvections**, *codées $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$, où α est un scalaire quelconque et $j \neq i$.*

29.2 ✍ *Les* **transpositions**, *codées $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$, où $j \neq i$.*

29.3 ✍ *Les* **dilatations**, *codées $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \leftarrow \alpha C_i$, où α est un scalaire inversible.*

30. ✍ *Une* **opération de pivot** *est la composée d'un nombre fini d'opérations élémentaires.*

31. Traduction matricielle

Toute opération de pivot sur une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à multiplier A par une matrice convenable.

31.1 ➙ *Une opération de pivot sur les lignes de $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à multiplier la matrice A* à gauche *par une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$.*

$$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad A \leftarrow PA.$$

31.2 ➙ *Une opération de pivot sur les colonnes de $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à multiplier la matrice A* à droite *par une matrice de $GL_p(\mathbb{K})$.*

$$\exists\, Q \in GL_p(\mathbb{K}), \quad A \leftarrow AQ.$$

31.3 ➙ *La matrice B et la matrice A sont équivalentes si, et seulement si, on peut transformer A en B par des opérations de pivot.*

32. Règles pratiques fondamentales

Les opérations de pivot ne sont utiles que si on a vraiment compris l'algorithme de Gauss.

32.1 Un algorithme est une succession d'opérations effectuées les unes après les autres pour parvenir à un but précis. Il faut toujours savoir où on veut aller pour y arriver !

32.2 Toute opération de pivot est inversible et son inverse est encore une opération de pivot.

32.3 On ne peut effectuer plusieurs opérations de pivot lors d'une même étape de l'algorithme que si ces opérations commutent :

1. Si une ligne (resp. une colonne) est modifiée par une opération, elle ne peut pas servir à modifier une autre ligne (resp. une autre colonne) lors de la même étape ;
2. On ne peut pas effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes lors de la même étape.

33. Image et noyau d'une matrice

Le rang de la matrice A est égal à r si, et seulement si, des opérations de pivot *sur les colonnes* permettent de passer de

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,n}(\mathbb{K}) \quad \text{à} \quad \begin{pmatrix} Y_1 & \cdots & Y_r & 0 & \cdots & 0 \\ X_1 & \cdots & X_r & X_{r+1} & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

où la famille $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est échelonnée.

33.1 Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \times P = \begin{pmatrix} AP \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & \cdots & Y_r & 0 & \cdots & 0 \\ X_1 & \cdots & X_r & X_{r+1} & \cdots & X_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, $Y_k = AX_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

33.2 La famille $(Y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base de $\operatorname{Im} A$.

33.3 La famille $(X_k)_{r<k\leqslant n}$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ et la famille $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} A$.

34. Inversibilité et calcul de l'inverse

La matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et son inverse est la matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, des opérations de pivot *sur les colonnes* peuvent faire passer de

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,n}(\mathbb{K}) \quad \text{à} \quad \begin{pmatrix} I_n \\ B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,n}(\mathbb{K}).$$

Opérations de pivot par blocs

35. Quand une matrice est écrite par blocs, il est naturel d'effectuer les opérations sur les lignes de blocs ou sur les colonnes de blocs (plutôt que sur les lignes ou les colonnes de la matrice).

36. Toute opération de pivot par blocs revient à multiplier la matrice étudiée par une matrice inversible :

- une opération de pivot sur les *colonnes* revient à remplacer A par AQ ;
- une opération de pivot sur les *lignes* revient à remplacer A par QA.

37. ➙ *Le rang d'une matrice est conservé par toute opération de pivot.*

38. Les transvections sont les opérations les plus fréquentes.

38.1 Comme les transvections par blocs sont en fait des transvections simultanées sur les lignes ou sur les colonnes, lorsqu'elles portent sur une matrice carrée, *les transvections par blocs conservent le déterminant* de cette matrice carrée.

38.2 Transvections sur les lignes
Tous les blocs de la i-ème ligne de blocs ont d_i lignes et ceux de la j-ème ligne en ont d_j [**17.2**]. Par conséquent, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_{d_i,d_j}(\mathbb{K})$, l'opération

$$L_i \leftarrow L_i + ML_j$$

est valide.

38.3 Transvections sur les colonnes
Tous les blocs de la i-ème colonne de blocs ont δ_i colonnes et ceux de la j-ème colonne en ont δ_j [**17.2**]. Par conséquent, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_{\delta_j,\delta_i}(\mathbb{K})$, l'opération

$$C_i \leftarrow C_i + C_jM$$

est valide.

38.4 Soient $A_1 \in \mathfrak{M}_{d_1}(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathfrak{M}_{d_2}(\mathbb{K})$.

1. En appliquant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - BL_2$, on passe de

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & I_{d_2} \end{pmatrix} \quad \text{à} \quad \begin{pmatrix} A_1 - BC & 0 \\ C & I_{d_2} \end{pmatrix}.$$

2. En appliquant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1B$, on passe de

$$\begin{pmatrix} I_{d_1} & B \\ C & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{à} \quad \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ C & A_2 - CB \end{pmatrix}.$$

39. Les autres opérations de pivot sont moins utiles et plus délicates à mettre en œuvre. On a intérêt à toujours les interpréter comme des multiplications par des matrices inversibles bien choisies.
On utilise toujours la décomposition en blocs vue au [**17.2**].

40. Dilatations
On peut multiplier la i-ème ligne ou la j-ème colonne de blocs de $A \in \mathfrak{M}_{N,P}(\mathbb{K})$ par des matrices inversibles bien choisies.

$$L_i \leftarrow ML_i \qquad C_i \leftarrow C_iM$$

L'opération sur les lignes revient à passer de A à QA avec

$$Q = \operatorname{Diag}(I_{d_1}, \dots, M, \dots, I_{d_n}) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad M \in \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K})$$

tandis que l'opération sur les colonnes revient à passer de A à AQ avec

$$Q = \operatorname{Diag}(I_{\delta_1}, \dots, M, \dots, I_{\delta_p}) \in \mathrm{GL}_P(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad M \in \mathrm{GL}_{\delta_i}(\mathbb{K}).$$

Dans les deux cas, le déterminant de la matrice est multiplié par $\det M$.
Les opérations $L_i \leftarrow L_iM$ et $C_i \leftarrow MC_i$ n'ont *a priori* aucun sens !

41. Permutations
Permuter certaines lignes (resp. certaines colonnes) de A revient à multiplier la matrice A à gauche (resp. à droite) par une matrice de permutation Q.
Le déterminant de A est alors multiplié par le déterminant de la matrice Q (qui est aussi la signature de la permutation sous-jacente).

Entraînement

42. On suppose que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

où les sous-matrices A et B sont des matrices carrées de même taille.

1. Quelle est la matrice de u^2 ?
2. La matrice de u est équivalente à $\operatorname{Diag}(A, B)$, donc

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

43. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. On suppose que la matrice de u relative à une base $\mathscr{B}$ bien choisie est la matrice M suivante.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où les blocs A et C sont des matrices inversibles.

1. Le bloc B est-il une matrice carrée ?
2. Trouver une matrice D telle que la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & D \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

soit l'inverse de M.

44. *Suite de* [**25**] – Au moyen d'une transvection, démontrer que la matrice B est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} A & 0_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

et retrouver le rang de B.

IV

Sous-espaces stables

45. L'image par $u \in \mathrm{L}(E)$ d'un sous-espace F de E est un sous-espace vectoriel de E, qu'on note $u_*(F)$.

45.1 ✍ *Un sous-espace F est* **stable** *par l'endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ lorsqu'il contient son image par u :*

$$u_*(F) \subset F.$$

45.2 Le sous-espace $F = \operatorname{Vect}(x_i, i \in I)$ est stable par u si, et seulement si, $u(x_i) \in F$ pour tout $i \in I$.

45.3 Si F et G sont deux sous-espaces stables par u, alors les sous-espaces $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u.

45.4 Si F est stable par u, alors F est stable par $Q(u)$ pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$.

45.5 Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

45.6 ➙ *Quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, les sous-espaces* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont stables par l'endomorphisme $P(u)$.*

IV.1 Endomorphisme induit par restriction

46. ✍ *Soient $u \in \mathrm{L}(E)$ et F, un sous-espace stable par u. L'***endomorphisme induit par restriction** *de u au sous-espace F est l'application $u_F : F \to F$ définie par*

$$\forall\, x \in F, \quad u_F(x) = u(x).$$

47. Sous-espaces stables et polynômes en u
Soient F, un sous-espace vectoriel stable par u et u_F, l'endomorphisme de F induit par restriction de u. Alors

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ \forall\, x \in F, \quad P(u_F)(x) = P(u)(x).$$

47.1 ➞ *Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, un sous-espace F stable par u est aussi stable par $P(u)$ et l'endomorphisme induit par restriction de $P(u)$ à F est $P(u_F)$.*
47.2 ➞ *Soient E, un espace de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(E)$. Si F est un sous-espace stable par u, alors $u_F \in \mathrm{GL}(F)$, le sous-espace F est stable par u^{-1} et*

$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$

48. Traduction matricielle
On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.
48.1 ➞ *Il existe un sous-espace F stable par $u \in \mathrm{L}(E)$ si, et seulement si, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où les blocs A et C sont des matrices carrées.
Dans ce cas, la matrice A représente l'endomorphisme u_F induit par restriction de u à F.
48.2 Il existe une base $\mathscr{B}$ de E et deux matrices carrées A et B telles que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

si, et seulement si, l'espace E est somme directe de deux sous-espaces stables par u.

49. Soit u, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

49.1 Le sous-espace $G = [x - 3y + 2z = 0]$ est stable par u. La droite $F = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 1)$ est stable par u. Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.
49.2 Soit (e_2, e_3), une base de G. Il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E pour laquelle

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On peut choisir les vecteurs e_2 et e_3 de telle sorte que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire.

IV.2 Matrices diagonales par blocs

50. Les matrices diagonales par blocs sont les matrices les plus simples qui existent. Cette simplicité découle d'une propriété géométrique importante **[51]**, qui permet en outre de donner un sens aux blocs diagonaux.
50.1 ✍ *Une matrice carrée écrite par blocs*

$$A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$$

est ***diagonale par blocs*** *lorsque les blocs $A_{i,j}$ sont nuls quels que soient les indices $i \neq j$.*
50.2 Les blocs diagonaux, qui sont toujours des matrices carrées, sont alors notés A_i au lieu de $A_{i,i}$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)$$

51. On considère une décomposition en somme directe de E et une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition de E.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k \qquad \mathscr{B} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathscr{B}_k$$

51.1 ➞ *Si chaque sous-espace E_k est stable par $u \in \mathrm{L}(E)$, alors la matrice de u relative à $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs :*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)$$

et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, le k-ième bloc diagonal représente l'endomorphisme u_k induit par restriction de u à E_k :

$$A_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_k}(u_k).$$

51.2 ➞ *Réciproquement, si la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs, alors la base $\mathscr{B}$ est adaptée à une décomposition de E en somme directe*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$$

où chaque sous-espace E_k est stable par u.
52. Il est aussi simple de calculer avec des matrices diagonales par blocs qu'avec des matrices diagonales.
52.1 Produit

$$\mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n) \times \mathrm{Diag}(B_1, \dots, B_n) = \mathrm{Diag}(A_1 B_1, \dots, A_n B_n)$$

52.2 ➞ *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,*

$$P\big(\mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)\big) = \mathrm{Diag}\big(P(A_1), \dots, P(A_n)\big).$$

52.3 Une matrice diagonale par blocs $A = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ est inversible si, et seulement si, ses blocs diagonaux sont tous inversibles et, dans ce cas,

$$A^{-1} = \mathrm{Diag}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}).$$

52.4 Changement de base adaptée
Soient $A = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ et $Q = \mathrm{Diag}(Q_1, \dots, Q_n)$, deux matrices diagonales par blocs. Si Q est inversible, alors $Q^{-1}AQ$ est diagonale par blocs :

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(Q_1^{-1} A_1 Q_1, \dots, Q_n^{-1} A_n Q_n).$$

Un tel changement de base dans E revient à changer de base dans chacun des sous-espaces E_k.
53. Calcul du déterminant
On considère une matrice diagonale par blocs :

$$A = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n).$$

53.1 La matrice A est un produit de matrices de la forme

$$\mathrm{Diag}(I_p, B, I_q),$$

dont le déterminant est égal à $\det B$.
53.2 ➞ *Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est égal au produit des déterminants des différents blocs diagonaux.*

$$\det\big(\mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} \det(A_k)$$

IV.3 Matrices triangulaires par blocs

54. ✍ *La matrice carrée* $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est* **triangulaire par blocs** *lorsque les blocs* $A_{i,j}$ *sont nuls quels que soient les indices* $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

55.1 Le produit de deux matrices triangulaires par blocs (supérieures)

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & B_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

est encore une matrice triangulaire par blocs (supérieures), dont les blocs diagonaux sont connus :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2}B_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}B_{n,n} \end{pmatrix}.$$

55.2 Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{1,1}^k & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

et par combinaison linéaire,

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(A_{1,1}) & \star & \cdots & \star \\ 0 & P(A_{2,2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & P(A_{n,n}) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

55.3 Une matrice triangulaire par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, chaque bloc diagonal est inversible.

Dans ce cas,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

56. Interprétation géométrique
La matrice de $u \in L(E)$ relative à la base $\mathscr{B}$ est triangulaire par blocs si, et seulement si, la base $\mathscr{B}$ est adaptée à une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$$

telle que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, le sous-espace

$$F_k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

soit stable par u.

57. Changement de base adaptée
Appliqué à une matrice triangulaire par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix},$$

le changement de base [**52.4**] donne une nouvelle matrice triangulaire par blocs, dont seuls les blocs diagonaux sont faciles à calculer.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}A_{1,1}Q_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & Q_2^{-1}A_{2,2}Q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & Q_n^{-1}A_{n,n}Q_n \end{pmatrix}.$$

58. Calculs de déterminants

58.1 Quel que soit le bloc B, la transvection $L_1 \leftarrow L_1 - BL_2$ conserve le déterminant.

$$\forall\, q \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \det(A)$$

58.2

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

58.3 → *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

Entraînement

59. Questions pour réfléchir

1. Si F est un sous-espace de dimension finie, alors $u_*(F)$ est un sous-espace de dimension finie et

$$\dim\big[u_*(F)\big] \leqslant \dim F.$$

Dans quel cas $u_*(F)$ et F ont-ils même dimension ?

2. Un endomorphisme $f \in L(E)$ commute à un projecteur p si, et seulement si, les sous-espaces $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.
3. Si le sous-espace F est stable par u et par v, alors F est stable par le ***crochet de Lie*** $[u,v] = u \circ v - v \circ u$.
4. Soit $u \in L(E)$.
4.a Condition pour qu'il existe une application $v : F \to F$ telle que

$$\forall\, x \in F, \quad v(x) = u(x).$$

4.b Si une telle application v est définie, alors c'est un endomorphisme de F.
5. Comparer u, sa restriction $u_{|F}$ à F et l'endomorphisme u_F induit par restriction à F.
6. Un sous-espace stable par u^2 est-il stable par u ? (Considérer une rotation ou une symétrie.)
7. Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une base de E et M, la matrice de u relative à la base $\mathscr{B}$. Condition sur M pour que le sous-espace $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ soit stable par u.
8. On suppose que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$. Quelle est la forme de la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition de E ?
9. Condition pour qu'une matrice diagonale par blocs soit diagonale.
10. La matrice de passage d'une base $\mathscr{B}_1$ à une base $\mathscr{B}_2$ est diagonale par blocs si, et seulement si, ces deux bases sont adaptées à une même décomposition en somme directe.
11. Les projections, les symétries, les affinités et les rotations peuvent être représentées par des matrices diagonales par blocs.
12. Décrire le noyau et l'image de $\operatorname{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ en fonction des noyaux et des images des blocs $A_1, \dots, A_n$. →**[66]**
13. Condition pour qu'une matrice triangulaire par blocs soit triangulaire ?

60. Soient a, b et c, trois scalaires. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

où

$$A = (a), \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Calculer $(M - aI_6)(M - bI_6)^2(M - cI_6)^3$.

61. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et α, β, γ, trois scalaires. Le déterminant de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0_n \end{pmatrix}$$

est égal à $(-\beta\gamma)^n (\det A)^2$.

62. Si le noyau et l'image de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où A' est une matrice inversible.

63. Soient A, B, C, D dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que D est inversible et que les matrices C et D commutent.
1. Les matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$$

sont équivalentes.
2. Le déterminant de M est égal à $\det(AD - BC)$.

64. *Suite de* **[19]** –
64.1 Déduire de **[19]** que $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$ pour tout scalaire λ non nul.
64.2 On suppose que la matrice A est inversible.
On applique d'une part la transvection $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 B$ et d'autre part les opérations de pivot suivantes à la matrice U :

$$L_1 \leftarrow A^{-1}L_1, \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad C_1 \leftarrow C_1 A.$$

Alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{vmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0_n & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n - BA & 0_n \\ BA & I_n \end{vmatrix}.$$

65. Soient $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le rang de A et le rang de B sont égaux à 2.
2. On écrit A et B par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ L_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_0 & C_3 \end{pmatrix}$$

où A_0 et B_0 appartiennent à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2.a Quelles sont les tailles des blocs L_3 et C_3 ?
2.b Les matrices A_0 et B_0 sont inversibles.
2.c Le produit BA est égal à I_2.

66. On suppose que E admet une décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$$

où les sous-espaces E_k sont tous stables par u. Pour $1 \leqslant k \leqslant r$, on note u_k, l'endomorphisme de E_k induit par restriction de u.
1. Les sous-espaces $\operatorname{Im} u_k$ sont-ils en somme directe ? Leur somme est-elle égale à E ?
2. Le noyau de u admet une décomposition en somme directe :

$$\operatorname{Ker} u = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} u_k.$$

Condition pour que l'application u soit injective ?

67. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de

$$B = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & A \end{pmatrix},$$

alors $P(1) = 0$ et $P(A) = 0_n$.
2. Les matrices $B - I_{2n}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ ont même rang. En déduire une base de l'image de $(B - I_{2n})$.

68. Soient A, B, C, D dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

La matrice Q est inversible et

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} A & AD - DB + C \\ 0_n & B \end{pmatrix}.$$

Si l'application $[M \mapsto AM - MB]$ est injective, alors la matrice M est semblable à $\operatorname{Diag}(A, B)$.

69. On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous strictement positifs et que $B = \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

1. La matrice
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$
est symétrique et
$$\det M = \det A . \det(-B^\top . A^{-1} . B).$$

2. Si le rang du bloc B est égal à m, alors le noyau de la matrice $B^\top . A^{-1} . B$ est réduit à la colonne nulle et la matrice M est inversible.

70.1 On suppose que les matrices $Q_1, \dots, Q_d$ sont inversibles. Alors la matrice diagonale par blocs
$$Q = \operatorname{Diag}(Q_1, \dots, Q_d)$$
est inversible et
$$Q^{-1} = \operatorname{Diag}(Q_1^{-1}, \dots, Q_d^{-1}).$$

70.2 On considère une matrice triangulaire par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$
où chaque bloc diagonal est semblable à une matrice triangulaire. Alors la matrice A est elle aussi semblable à une matrice triangulaire.

Questions, exercices & problèmes

71. Soit E, un espace vectoriel *réel* de dimension d. On considère un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\mathrm{I}_E$.

1. Pour tout vecteur $a \neq 0_E$, le sous-espace
$$F(a) = \operatorname{Vect}(a, f(a))$$
est un plan stable par f.

2. La matrice relative à $\mathscr{B}_a = \big(a, f(a)\big)$ de l'endomorphisme $f_a \in \mathrm{L}\big(F(a)\big)$ induit par restriction de f au sous-espace $F(a)$ est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Pour tout vecteur $x \neq 0_E$ dans $F(a)$, on a $F(x) = F(a)$.

4. On suppose connus k vecteurs $a_1, \dots, a_k$ de E tels que
$$E_k \overset{\text{déf.}}{=} \bigoplus_{i=1}^{k} F(a_i)$$
soit strictement contenu dans E. Alors, pour tout $x \in E \setminus E_k$,
$$F(x) \oplus E_k \subset E.$$

5. En déduire que la dimension de E est paire puis que, dans une base de E bien choisie, la matrice de f est de la forme
$$\operatorname{Diag}(A, A, \dots, A),$$
où la matrice A a été définie en [2].

72. Endomorphismes de trace nulle et crochet de Lie

1. Quelles que soient les matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la trace de $[A, B] = AB - BA$ est nulle.

2. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$, un endomorphisme de trace nulle.

2.a Que dire d'une homothétie de trace nulle ?

2.b Si u n'est pas une homothétie, alors [**9.66**] il existe un vecteur $x_1 \in E$ tel que le couple $\big(x_1, u(x_1)\big)$ soit une famille libre et une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & \\ 0 & & N_1 & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
où $N_1 \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle.

3. Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

4. Soient $D_n = \operatorname{Diag}(1, 2, 3, \dots, n)$ et Φ, l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi(M) = MD_n - D_n M.$$
Le noyau de Φ est le sous-espace des matrices diagonales et son image est le sous-espace des matrices dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

5. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. La trace de u est nulle si, et seulement si, il existe deux endomorphismes v et w de E tels que
$$u = v \circ w - w \circ v.$$

73. Soient $f_1, \dots, f_n$, des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ dans I tels que
$$\det\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0.$$
Alors la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre dans $\mathscr{A}(I, \mathbb{R})$.

2. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose
$$W_k(x_1, \dots, x_k) = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R}).$$

2.a S'il existe $x_1, \dots, x_{k-1}$ dans I tels que la matrice
$$W_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$$
soit inversible et que
$$\forall\, x_k \in I, \quad \det\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} = 0,$$
alors, pour tout $x \in I$, la k-ième ligne de la matrice
$$W_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x)$$
est une combinaison linéaire des $(k-1)$ premières lignes de cette matrice et la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est liée dans $\mathscr{A}(I, \mathbb{R})$.

2.b Par récurrence, si $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre dans $\mathscr{A}(I, \mathbb{R})$, alors il existe $x_1, \dots, x_n$ dans I tels que
$$\det W_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

3. Condition pour que $\mathscr{A}(I, \mathbb{R})$ soit un espace de dimension finie ? Dimension de $\mathscr{A}(I, \mathbb{R})$ dans ce cas ?