3
Normes

I
Borne supérieure, borne inférieure

I.1 Axiome de la borne supérieure

1. Soit A, une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathfrak{M}(A)$, l'ensemble des majorants de A :

$$M \in \mathfrak{M}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

et $\mathfrak{m}(A)$, l'ensemble des minorants de A :

$$m \in \mathfrak{m}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad m \leqslant x.$$

1.1 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une* **borne supérieure** *lorsque l'ensemble $\mathfrak{M}(A)$ de ses majorants admet un plus petit élément. Dans ce cas,* $\min \mathfrak{M}(A)$ *est noté* $\sup(A)$.
1.2 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une* **borne inférieure** *lorsque l'ensemble $\mathfrak{m}(A)$ de ses minorants admet un plus grand élément. Dans ce cas,* $\max \mathfrak{m}(A)$ *est noté* $\inf(A)$.

2. Borne supérieure et maximum
2.1 ➙ *Si la partie A admet un plus grand élément, alors elle admet aussi une borne supérieure et de plus* $\sup(A) = \max(A)$.
2.2 ➙ *Si A admet une borne supérieure et si cette borne appartient à A, alors c'est le plus grand élément de A, soit :* $\sup(A) = \max(A)$.

3. Axiome de la borne supérieure
Les deux énoncés suivants sont équivalents.
3.1 ➙ *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
3.2 ➙ *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

I.2 Borne supérieure et inégalités

4. Majoration par le $\sup$
4.1 ➙ *La borne supérieure de A est un majorant de A :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \leqslant \sup(A).$$

4.2 Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée. S'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant \sup(A)$.
4.3 ➙ *Pour toute partie bornée et non vide $A \subset \mathbb{R}$,*

$$\inf(A) \leqslant \sup(A).$$

5. Caractérisation séquentielle
Soit A, une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
5.1 Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$ et une suite d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$.
5.2 ➙ *Un majorant M de A est égal à $\sup(A)$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.*
5.3 Si B est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de B qui tend vers $+\infty$.

6. Passage au $\sup$
Connaissant une majoration par une quantité indépendante d'un paramètre x, on peut ***passer au*** $\sup$ sur ce paramètre.
Cette opération est analogue au ***passage à la limite*** pour une suite convergente, qui fait passer d'une propriété vraie à partir d'un certain rang à une propriété de la limite. →[**4.2**]
6.1 ➙ *Si A est une partie non vide et majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

alors :

$$\sup(A) \leqslant M.$$

6.2 ➙ *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) \leqslant M$$

alors

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant M.$$

7. Passage à l'$\inf$
7.1 ➙ *Si A est une partie non vide et minorée par m :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \geqslant m$$

alors on peut ***passer à l'***$\inf$ *dans cette inégalité :*

$$\inf(A) \geqslant m.$$

7.2 ➙ *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée par m :*

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) \geqslant m$$

alors on peut passer à l'$\inf$ *dans cette inégalité :*

$$\inf_{x\in X} f(x) \geqslant m.$$

8. ➙ Monotonie des opérateurs
Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$ qui admettent chacune une borne supérieure et une borne inférieure.
Si $A \subset B$, alors

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \quad \textit{et} \quad \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

9. ➙ *Soit A, une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.*

$$\forall\, \lambda > 0, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \textit{et} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

Entraînement

10. Questions pour réfléchir
1. Décrire $\mathfrak{M}(\varnothing)$ et $\mathfrak{m}(\varnothing)$.
2. Condition pour que $\mathfrak{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{m}(A)$) soit une partie non vide de $\mathbb{R}$.
3. Conditions pour qu'une partie admette un plus grand élément ?
4. Exemple de partie $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne supérieure mais pas de plus grand élément ?
5. Soient A, une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M et $\varepsilon > 0$.
5.a Il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant M$.
5.b Existe-t-il $y_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < y_\varepsilon < M$?
6. Soient f et g, deux fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6.a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big[f(x) + g(x)\big] \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$$

6.b Même si les deux fonctions f et g atteignent un maximum, leur somme $f + g$ n'atteint pas nécessairement un maximum.
7. Condition sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\inf(A) = \sup(A)$.
8. *Suite de* [**9**] – Examiner les cas $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.
9. On suppose que

$$\forall\, x \in A, \quad x < M.$$

Comparer $\sup(A)$ et M : le passage au sup conserve-t-il les inégalités strictes ?

10. Si $u_i \leqslant v_j$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{j\in J} v_j \leqslant \sup_{j\in J} v_j.$$

Illustrer ce résultat par une figure.
11. Si $u_i \leqslant v_i$ pour tout $i \in I$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{i\in I} v_i \quad \text{et} \quad \sup_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} v_i.$$

Comparer $\sup_{i\in I} u_i$ et $\inf_{i\in I} v_i$ (à l'aide d'une figure).

11. Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie bornée non vide, alors il existe une suite d'éléments de A^c qui converge vers $\sup(A)$.

12. On suppose que A admet M pour borne supérieure.
1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers M, alors on peut extraire une suite croissante $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M. Il existe donc une suite croissante d'éléments de A qui converge vers M.
2. Existe-t-il une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers M ?

13. Soit $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, une famille réelle bornée.

13.1 Pour tout $i \in I$,

$$\inf_{j\in J} U_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{k\in I} U_{k,j}.$$

13.2 Pour toute famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, bornée ou non,

$$\sup_{i\in I} \inf_{j\in J} U_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{i\in I} U_{i,j}.$$

13.3 Avec $U_{i,j} = \frac{i}{i+j}$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'inégalité entre les bornes est stricte.

II

Distances dans un espace vectoriel

14. Une ***norme*** sert à mesurer la distance qui sépare deux points. On peut ainsi définir la notion de ***suite convergente***, puis de la notion de ***fonction continue***.

II.1 Espaces vectoriels normés

15. ✍ *Soit E, un espace vectoriel réel ou complexe. Le corps des scalaires est noté $\mathbb{K}$.*
On appelle **norme sur** *E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$*

15.1 *qui* **sépare les points** *:*

$$N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

15.2 *est* **positivement homogène** *:*

$$\forall\,(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$

15.3 *et vérifie l'***inégalité triangulaire** *:*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

16. Inégalité triangulaire
L'inégalité [**15.3**] peut être généralisée au cas d'une combinaison linéaire quelconque et exprimée sous la forme plus forte de l'encadrement [**16.2**].

16.1 Quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ dans E et les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$N\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, N(x_k).$$

16.2 ➙ *Si N est une norme sur E, alors*

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$$

quels que soient x et y dans E.

17.1 ✍ *Un* **espace vectoriel normé** *est un espace vectoriel E sur lequel est défini une norme N.*

17.2 La restriction d'une norme N sur E à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F.

17.3 ✍ *Soient (E, N), un espace vectoriel normé et F, un sous-espace vectoriel de E. La* **norme induite** *par N sur le sous-espace F est la restriction de N à F.*

18. Exemples fondamentaux

18.1 La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

18.2 Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ (vu comme un espace vectoriel réel aussi bien que comme un espace vectoriel complexe).

18.3 ✍ *Soit $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$, un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E. La* **norme associée au produit scalaire** *$\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est définie par*

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x\| = \sqrt{\langle\, x \,|\, x \,\rangle}.$$

19. Vecteurs unitaires
Soit N, une norme sur l'espace vectoriel E.

19.1 ✍ *Un vecteur $x \in E$ est* **unitaire** *lorsque $N(x) = 1$.*

19.2 ✍ *La* **sphère unité** *S^1 de (E, N) est définie par*

$$S^1 = \big[N(x) = 1\big].$$

19.3 ➙ *Pour tout vecteur $x \in E$* non nul, *il existe un scalaire $\lambda > 0$ et un vecteur $u \in S^1$ tels que*

$$x = \lambda u.$$

Cette factorisation de x est unique.

Distance associée à une norme

20. ✍ *La* **distance** *associée à la norme N sur E est l'application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = N(x-y).$$

21. ➙ *La distance d associée à une norme N est une application*

21.1 **symétrique** *:*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = d(y,x)$$

21.2 *qui* **sépare les points** *:*

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

21.3 *qui vérifie l'***inégalité triangulaire** *:*

$$\forall\,(x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

21.4 *et qui est* **invariante par translation** *:*

$$\forall\,(x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

Parties bornées

22.1 ✍ *Une partie A de E est* **bornée** *pour la norme N lorsque*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in A, \quad N(x) \leqslant M.$$

22.2 ✍ *Une application $f : X \to E$ est* **bornée** *pour la norme N sur E lorsque son image $f_*(X)$ est une partie bornée de E :*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in X, \quad N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

23. ✍ *La* **boule unité (fermée)** B_f^1 *est définie par*

$$B_f^1 = [N(x) \leqslant 1]$$

et la **boule unité ouverte** B_o^1 *par*

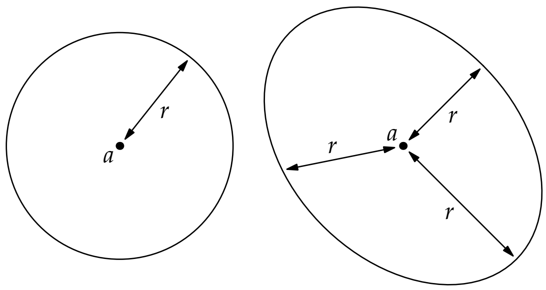
$$B_o^1 = [N(x) < 1].$$

24.1 ✍ *La* **sphère** *de centre* $a \in E$ *et de rayon* r *pour la norme* N *est définie par*

$$S(a,r) = [N(x-a) = r] = [d(x,a) = r].$$

24.2 Sphères euclidiennes de rayon r et de centre a pour la norme euclidienne canonique (à gauche) et (à droite) pour la norme définie par

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|^2 = \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{3}{4}u_y^2 + \frac{1}{2}u_x u_y.$$

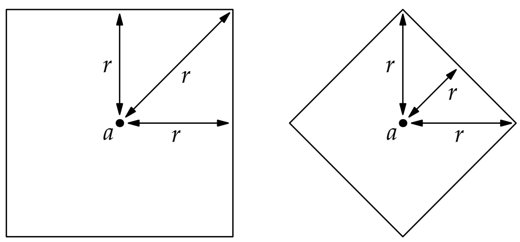


24.3 Sphères de rayon r et de centre a pour la ***norme produit*** (à gauche) :

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max\{|u_x|, |u_y|\}$$

et (à droite) pour la norme définie par

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|_1 = |u_x| + |u_y|.$$



25.1 ✍ *La* **boule fermée** *de centre* $a \in E$ *et de rayon* r *pour la norme* N *est définie par*

$$B_f(a,r) = [\|x-a\| \leqslant r] = [d(x,a) \leqslant r].$$

25.2 ✍ *La* **boule ouverte** *de centre* $a \in E$ *et de rayon* r *pour la norme* N *est définie par*

$$B_o(a,r) = [\|x-a\| < r] = [d(x,a) < r].$$

25.3 La boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon r est l'union (disjointe) de la sphère de centre a et de rayon r et de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

$$B_o(a,r) \subsetneq B_o(a,r) \sqcup S(a,r) = B_f(a,r)$$

26. → *Une partie de E est bornée si, et seulement si, elle est contenue dans une boule (ouverte ou fermée).*

Normes sous-multiplicatives

27. Certains espaces vectoriels ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$, $L(E)$, $\mathscr{A}(\Omega,\mathbb{K})$...) sont également munis d'une structure d'anneau, qui en font des ***algèbres (associatives unitaires)***.
Sur de tels espaces vectoriels, certaines normes sont plus utiles que d'autres.

28. ✍ *Soit* $(E, +, \times, \cdot)$*, une algèbre associative unitaire. Une norme* N *est* **sous-multiplicative** *sur* E *lorsque*

$$\forall\, x, y \in E, \qquad N(x \times y) \leqslant N(x).N(y).$$

29. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$ sont deux normes sous-multiplicatives.

II.2 Exemples de normes

30. ✍ **Norme produit**
Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_d, N_d)$*, des espaces vectoriels normés. On considère l'espace vectoriel produit :*

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d.$$

La **norme produit** $\|\cdot\|_\infty$ *sur* E *est définie par*

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d) \in E, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} N_k(x_k).$$

Exemples en dimension finie

31. **Norme produit associée à une base**
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$, une base de E et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*)$, la base duale. L'application $N_\infty : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |e_k^*(x)|$$

est une norme sur E.

32. **Normes sur** $\mathbb{K}^d$
Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$ sont les suivantes :

32.1 ✍ *La* **norme euclidienne canonique** *sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d), \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

32.2 ✍ *La* **norme produit** *sur* $\mathbb{K}^d$ *:*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |x_k|$$

et la norme définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|.$$

33. **Normes sur des espaces de matrices**
De même, l'espace $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices est muni de trois normes usuelles.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

33.1 ✍ *La* **norme euclidienne canonique** *sur* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est définie par*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2}.$$

33.2 La norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ est sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

33.3 ✍ *Pour tout* $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,*

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} |a_{i,j}|.$$

Espaces de fonctions bornées

34. On se restreint pour le moment à considérer seulement des fonctions bornées.

34.1 ✍ *Soient (E, N), un espace vectoriel normé et X, un ensemble non vide. La* **norme (de la convergence) uniforme (sur X)** *sur l'espace $\mathscr{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{B}(X, E), \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} N\big(f(x)\big).$$

34.2 ➙ *La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ est sous-multiplicative.*

34.3 L'espace $E = \mathscr{C}^1(I)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $I = [a, b]$ peut être normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} N\big(f(x)\big) \quad \text{ou par} \quad \|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

34.4 ✍ *Si l'intervalle I est un segment : $I = [a, b]$, alors l'espace des fonctions continues sur I peut être muni de la* **norme de la convergence en moyenne sur I** *:*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}), \qquad \|f\|_1 = \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

34.5 ✍ *De même, il peut être muni de la* **norme de la convergence en moyenne quadratique sur** *I, définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}), \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Espaces de suites

35.1 ✍ **Suites bornées**

On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$u \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \iff \exists\, M > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |u_k| \leqslant M.$$

et la norme naturelle sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|.$$

35.2 ✍ **Familles sommables**

Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **sommable** *lorsque la série de terme général positif $\sum |u_k|$ est convergente.*

L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^1(\mathbb{K})$ et la norme naturelle sur l'espace $\ell^1(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

35.3 ✍ **Familles de carré sommable**

Une suite u d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite **de carré sommable** *lorsque la série $\sum u_k^2$ est absolument convergente.*

L'espace vectoriel des suites de carré sommable est noté $\ell^2(\mathbb{K})$.

La norme naturelle sur $\ell^2(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2}.$$

II.3 Parties convexes

36. Soit E, un espace vectoriel. Les vecteurs de E seront ici appelés des ***points*** et notés avec des lettres majuscules.

36.1 ✍ *On considère un* **système pondéré**, *c'est-à-dire une famille finie de couples $(A_k, \alpha_k) \in E \times \mathbb{K}$ dont le* **poids total** *n'est pas nul :*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0.$$

36.2 ✍ *Le* **barycentre** *du système pondéré*

$$\big[(A_k, \alpha_k)\big]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

de poids total α est le point $G \in E$ défini par

$$G = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot A_k.$$

36.3 ✍ *Un point G de E est une* **combinaison convexe** *des points $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E lorsqu'il existe une famille de réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \alpha_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \qquad \text{et} \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k.$$

36.4 ✍ *L'***isobarycentre** *des points $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E est le barycentre du système pondéré $\big[(A_k, 1)\big]_{1\leqslant k\leqslant n}$:*

$$G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

37. **Exemples géométriques simples**

Soient A et B, deux points distincts.

37.1 La ***droite*** (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.

37.2 ✍ *Le* **segment** *$[A, B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B :*

$$[A, B] = \big\{(1-t)A + tB,\ t \in [0, 1]\big\}.$$

37.3 ✍ *Soient A, B et C, trois points. Le* **triangle** *ABC est l'ensemble des combinaisons convexes de A, B et C.*

38.1 ✍ *Une partie $K \subset E$ est* **convexe** *lorsque*

$$\forall\, (A, B) \in K^2, \qquad [A, B] \subset K.$$

39. L'intersection de deux parties convexes de E est une partie convexe de E.

39.1 ➙ *Une partie $K \subset E$ est convexe si, et seulement si, toute combinaison convexe de points de K appartient à K.*

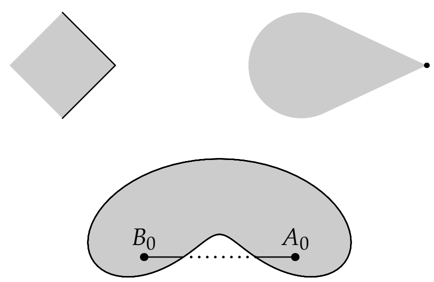
40. **Exemples et contre-exemple**

40.1 Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

40.2 Tout triangle est convexe.

40.3 Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

40.4



41. ➙ *Soit (E, N), un espace vectoriel normé. Quel que soit $a \in E$ et $r > 0$, la boule ouverte et la boule fermée de centre a et de rayon r sont convexes.*

Entraînement

42. Questions pour réfléchir

1. Soient $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et $f \in L(E, F)$. L'application $N_f : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad N_f(x) = \|f(x)\|$$

est une norme sur E si, et seulement si, f est injective.

2. Un sous-espace vectoriel est-il une partie bornée ?
3. Une intersection de parties bornées est-elle bornée ?
4. Condition pour que l'union d'une famille de parties bornées soit encore bornée.
5. Le complémentaire d'une partie bornée est-il borné ?
6. Une application linéaire est-elle bornée ?
7. Soient N_1 et N_2, deux normes distinctes sur E. Il existe un vecteur $x \in E$ unitaire pour N_1 sans être unitaire pour N_2.
8. Que dire d'un vecteur $x \in E$ dont la norme $N(x)$ ne dépend pas de la norme N définie sur E ?
9. La sphère unité et la boule unité sont-elles des parties bornées ? des sous-espaces vectoriels ?
10. Quels que soient $a \in E$ et $r > 0$, la sphère $S(a, r)$ n'est pas vide.
11. Toute boule ouverte (resp. fermée) de rayon strictement positif contient une boule fermée (resp. ouverte) de rayon strictement positif.

12.a Une boule ouverte est l'union d'une suite croissante (pour $\subset$) de boules fermées.

12.b Une boule fermée est l'intersection d'une suite décroissante (pour $\subset$) de boules ouvertes.

13. La sphère $S(a, r)$ et les boules $B_f(a, r)$ et $B_o(a, r)$ sont les images réciproques respectives de $\{r\}$, $[0, r]$ et $]-\infty, r[$ par l'application $[x \mapsto d(x, a)]$.
14. Soient N_1 et N_2, deux normes sur E. On suppose qu'il existe $a_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que les sphères de centre a_0 et de rayon r_0 soient les mêmes pour les normes N_1 et N_2. Comparer les normes N_1 et N_2.
15. Si K est convexe, alors, quels que soient les points A, B et C dans K, le triangle ABC est contenu dans K.
16. L'union de deux parties convexes de E est-elle une partie convexe de E ?
17. Tout sous-espace affine de E est convexe.
18. Une sphère de rayon $r > 0$ n'est pas convexe.
19. Les parties convexes du **[40.4]** ne sont pas des boules. Pourquoi ?

43. *Suite de* **[34.4]** – L'application $[f \mapsto \|f\|_1]$ n'est pas une norme sur l'espace $\mathscr{C}^{0,m}([a, b], \mathbb{R})$ des applications continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.

44. *Suite de* **[31]** – L'application $N_1 : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) = \sum_{k=1}^{d} \left|e_k^*(x)\right|$$

est une norme sur E.

45. On suppose que $\|\cdot\|$ est la norme associée à un produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ sur E. Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} \left|\langle x \,|\, y \rangle\right| = \max_{\|y\|\leqslant 1} \left|\langle x \,|\, y \rangle\right| = \sup_{\|y\|<1} \left|\langle x \,|\, y \rangle\right|.$$

46. Soit F, un sous-espace vectoriel de E qui contient A_1, …, A_n. Tout barycentre de A_1, …, A_n appartient à F.

47. Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, les systèmes pondérés

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad [(A_k, \lambda\alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$$

ont même barycentre.

48. Soit G, le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $[(f(A_k), \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$.

49. Inégalité de Hölder
Soient deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On dit que ces réels sont ***conjugués***.
Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

1. Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans $\mathbb{K}^d$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Alors, par concavité de ℓn,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad |x_i y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant 1.$$

2. On en déduit l'***inégalité de Hölder*** : →**[132]**

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

III

Suites de vecteurs

50. On se place dans un espace vectoriel E, normé par $\|\cdot\|$. Toutes les propriétés énoncées sont relatives à la norme $\|\cdot\|$ qui a été choisie.

51. Suites convergentes

51.1 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E* **converge vers** *$a \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

51.2 Unicité de la limite
Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et vers b pour la même norme $\|\cdot\|$, alors $a = b$.

51.3 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est* **convergente (pour la norme $\|\cdot\|$)** *lorsqu'il existe $a \in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

Dans ce cas, a est **la limite (pour la norme $\|\cdot\|$)** *de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

51.4 Méthode
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si, et seulement si, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|a_n - a\| \leqslant \varepsilon_n.$$

51.5 ✍ *Une suite est* **divergente (pour $\|\cdot\|$)** *lorsqu'elle n'est pas convergente pour $\|\cdot\|$.*

III.1 Propriétés des suites convergentes

52. ➞ *Toute suite convergente est bornée.*

53. ➞ *Si la suite (de vecteurs) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$$

(convergence d'une suite réelle).

54. ➞ *Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $a \in E$, $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*

54.1 *la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a + b)$;*

54.2 *la suite $(\lambda_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (λa).*

55. ➙ *On suppose que E est une algèbre et que la norme* $\|\cdot\|$ *est sous-multiplicative* **[28]**.
Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers a et b respectivement, alors la suite produit* $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ab.*

56. Cas des suites à valeurs dans un espace produit
On considère l'espace vectoriel produit

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d$$

muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ **[30]**.
56.1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E possède d composantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{d,n}) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d.$$

56.2 ➙ *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans l'espace produit E converge (pour la norme produit) si, et seulement si, ses d composantes*

$$(u_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_{d,n})_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent dans (E_1, N_1), (E_2, N_2), …, (E_d, N_d) *respectivement.*
Dans ce cas, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est égale à*

$$\big(\lim_{n\to+\infty} u_{1,n}, \lim_{n\to+\infty} u_{2,n}, \dots, \lim_{n\to+\infty} u_{d,n}\big) \in E.$$

56.3 Dans un espace produit, on dit qu'*une suite converge composante par composante*.

III.2 Suites extraites et valeurs d'adhérence

57.1 ✍ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite de vecteurs de E. La suite* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite extraite** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si, et seulement si, il existe une application strictement croissante* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad v_k = u_{\varphi(k)}.$$

57.2 Autrement dit, l'***extractrice*** φ sélectionne les termes de la suite u d'indice $n = \varphi(k)$.
57.3 On dit aussi que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une ***sous-suite*** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
57.4 Double extraction
Si la suite $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une extractrice ψ telle que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad w_m = v_{\psi(m)} = u_{\varphi[\psi(m)]} = u_{(\varphi\circ\psi)(m)}.$$

On sélectionne cette fois les termes de la suite u ayant pour indice $n = \varphi(k)$ avec $k = \psi(m)$.

58. ➙ *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in E$, *alors toute suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et tend aussi vers* ℓ.

59. ➙ *Si les deux suites extraites* $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ *convergent vers le même vecteur* ℓ, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et sa limite est égale à* ℓ.

60. On connaît le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.
60.1 ✍ *Un élément* ℓ *de E est une* **valeur d'adhérence** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsqu'il existe une suite extraite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ℓ.
60.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour valeur d'adhérence si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

60.3 Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.
60.4 ➙ *Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

III.3 Relations de comparaison

61. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et on souhaite déterminer avec plus ou moins de précision l'ordre de grandeur d'une suite de vecteurs.
Les suites de référence sont, en général, des suites réelles dont le terme général est strictement positif.

62. Domination
62.1 ✍ *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs de E est* **dominée** *par la suite réelle* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque la suite réelle* $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dominée par la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \|a_n\| = \mathcal{O}(\alpha_n)$$

62.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

est bornée.

63. Négligeabilité
63.1 ✍ *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs de E est* **négligeable** *devant la suite réelle* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque la suite réelle* $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est négligeable devant* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a_n = o(\alpha_n) \iff \|a_n\| = o(\alpha_n)$$

63.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

tend vers 0_E.

64. Équivalence
64.1 Si $\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|)$, alors $\|a_n - b_n\| = o(\|a_n\|)$.
64.2 ✍ *Deux suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs sont* **équivalentes** *:*

$$a_n \sim b_n$$

lorsque

$$\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|).$$

64.3 Si $a_n \sim b_n$, alors $\|a_n\| \sim \|b_n\|$ et si la norme est associée à un produit scalaire, alors l'angle formé par les vecteurs a_n et b_n tend vers 0.
64.4 S'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires qui tend vers 1 telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n,$$

alors $a_n \sim b_n$.

Entraînement

65. Questions pour réfléchir
1. Une suite qui tend vers l'infini n'admet pas de valeur d'adhérence.
2. Une suite qui n'est pas bornée peut-elle admettre une valeur d'adhérence ?
3. Si $\|a_n\| \sim \|b_n\|$, les suites de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes ?

66. Soit $\|\cdot\|$, une norme sur un espace vectoriel E. On suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ. Alors, pour tout vecteur $x \in E$, la suite de terme général $u_k \cdot x$ converge vers le vecteur $\ell \cdot x$.

67. ➙ *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *une application strictement croissante. Alors* $\varphi(n) \geqslant n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

68. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{2}u_{2n} = 0.$$

Si a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $-2a$ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

69. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \qquad N_a(P) = \big|P(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X/2)^n$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $-2 < a \leqslant 2$.
(Étudier $\|P_n\|$, cf [53].)

70. Distance à une partie

70.1 ✍ *La* **distance d'un point** $x \in E$ **à une partie non vide** A *de* E *est définie par*

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

70.2 Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$d(x, A) = \lim_{n\to+\infty} d(x, u_n)$$

et une telle suite est bornée.

70.3 La distance de x à une partie A est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, u_n) = 0.$$

70.4 Donner une condition sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ pour que

$$d(0, I) = \min_{y\in I} d(0, y).$$

71. Méthode de Newton

L'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur E.

1. Cette norme est sous-multiplicative [33.2].
2. On suppose connue une matrice M_0 telle que

$$\|I_n - AM_0\| < 1$$

et on pose

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M_{k+1} = 2M_k - M_k A M_k.$$

2.a S'il existe une colonne X_0 non nulle telle que

$$AM_0X_0 = 0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

alors il existe une matrice $B \in E$ non nulle telle que

$$AM_0B = 0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Comme il est impossible que

$$\big\|(I_n - AM_0)B\big\| < \|B\|,$$

la matrice AM_0 est inversible.

2.b Exprimer $I_n - AM_{k+1}$ en fonction de $I_n - AM_k$. En déduire que AM_k converge vers I_n lorsque k tend vers $+\infty$.

2.c La matrice A est inversible et les matrices M_k convergent vers la matrice inverse A^{-1} lorsque k tend vers l'infini.

2.d Estimer la vitesse de convergence de cette méthode. Quelle difficulté cette méthode pose-t-elle ?

72. Diamètre d'une partie bornée

Le ***diamètre*** d'une partie non vide et bornée A de E est défini par

$$\phi(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x, y).$$

1. Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que

$$\phi(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n).$$

2. Que dire de A lorsque $\phi(A) = 0$?
3. Quelle que soit la norme N, le diamètre de la sphère unité et celui de la boule unité sont égaux à 2.

IV

Comparaison des normes

73. Un même espace vectoriel E peut être muni de différentes normes et deux normes distinctes sur un même espace vectoriel définissent *a priori* deux topologies différentes.

74. ✍ *La norme* N_2 *est* **équivalente** *à la norme* N_1 *lorsqu'il existe deux réels* a *et* b *strictement positifs tels que*

$$\forall\, x \in E, \quad aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x).$$

75. ➛ *On suppose que les normes* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes.*

75.1 *Une partie* $A \subset E$ *est bornée pour* N_1 *si, et seulement si, elle est bornée pour* N_2.

75.2 *Une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pour* N_1 *si, et seulement si, elle converge pour* N_2 *et, dans ce cas, sa limite est la même pour les deux normes.*

76. Lorsque deux normes ne sont pas équivalentes, une même suite peut converger vers deux limites différentes. →[89]

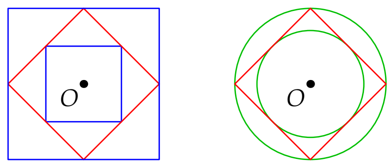
77. Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$

Les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

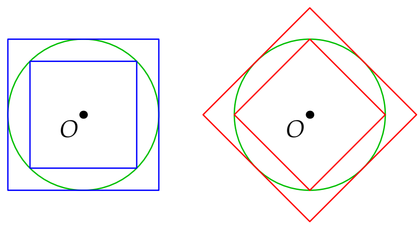
$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_1 \leqslant d\|x\|_\infty\\ \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{d}\|x\|_\infty\\ \|x\|_2 &\leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{d}\|x\|_2\end{aligned}$$

77.1 On peut traduire géométriquement l'équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$ en comparant les cercles unité de ces différentes normes.

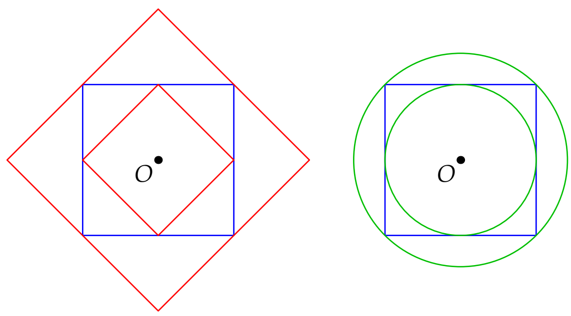
77.2 Si $\|x\|_1 = 1$, alors $1/2 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant 1$.



77.3 Si $\|x\|_2 = 1$, alors $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{2}$.



77.4 Si $\|x\|_\infty = 1$, alors $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2$ et $1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}$.



78. Méthodes

On démontrera que, *sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes*. Dans ce cas, les calculs ne servent qu'à expliciter des constantes strictement positives a et b qui vérifient l'encadrement [74].

78.1 On dit que la norme N_1 est ***dominée*** par la norme N_2 si, et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \qquad N_1(x) \leqslant C.N_2(x).$$

Pour démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, on démontre successivement que N_1 est dominée par N_2, puis que N_2 est dominée par N_1.

78.2 Pour démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes sur E, on cherche

— une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui est bornée pour une norme sans être bornée pour l'autre norme ;

— ou une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E pour une norme sans tendre vers 0_E pour l'autre norme.

Exemples et contre-exemples

79. Trois normes équivalentes

On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$.

1. Les applications N_1, N_2 et N_3 définies par

$$\forall\, f \in E, \qquad \begin{cases} N_0(f) = \|f'\|_\infty \\ N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

sont des normes sur E.

2. Soit $f \in E$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $N_0(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_0(f)$

3. Soient $f \in E$ et $g = f + f'$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = e^{-t}\int_0^t e^s g(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $\|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ et $N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 3N_2(f)$.

80. Les normes usuelles sur l'espace $\ell^1(\mathbb{R})$ des suites réelles sommables **[35]** ne sont pas équivalentes :

1.
$$\forall\, x \in \ell^1(\mathbb{R}), \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \big(\underbrace{1/n, \cdots, 1/n}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \dots\big).$$

Alors
$$\|x_n\|_\infty = \frac{1}{n}, \quad \|x_n\|_1 = 1, \quad \|x_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

81. Sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des applications continues sur le segment $[a,b]$, la norme de convergence en moyenne est dominée par la norme uniforme :

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_1 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$$

Les fonctions $f_n = [t \mapsto t^n]$ montrent que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

82. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(0)\big| \quad \text{et} \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in[-1,1]} \big|P(t)\big|$$

ainsi que
$$\|P\|_3 = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{si} \quad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k.$$

1.a La norme $\|\cdot\|_1$ domine $\|\cdot\|_3$ et comme

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|P(t)\big| \leqslant \|P\|_1 \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|t|^k}{k!}$$

elle domine aussi $\|\cdot\|_2$.

1.b La norme $\|\cdot\|_1$ n'est dominée ni par $\|\cdot\|_2$, ni par $\|\cdot\|_3$ (considérer la base canonique de $\mathbb{R}[X]$).

2. La norme $\|\cdot\|_2$ ne domine pas $\|\cdot\|_3$ (considérer les polynômes $P_n = (1 - X^2)^{2n}$) et la norme $\|\cdot\|_3$ ne domine pas $\|\cdot\|_2$ (considérer les polynômes $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$).

Entraînement

83. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[74]** – Quelles sont les constantes a et b optimales ?

2. L'équivalence **[74]** entre les normes sur E est une relation d'équivalence.

84. Soit E, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Pour tout polynôme $Q \in E$ distinct du polynôme nul, on pose

$$\forall\, P \in E, \qquad N_Q(P) = \sup_{t\in[-1,1]} \big|P(t)Q(t)\big|.$$

1. L'application N_Q est une norme sur E.

2. Si le polynôme Q ne s'annule pas sur le segment $[-1,1]$, alors la norme N_Q est équivalente à la norme N_1 (associée au polynôme $Q_0 = 1$).

85. Soit E, l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \quad \text{et} \quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{2^k}.$$

Les applications N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E. La norme N est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

86. L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ est muni des normes usuelles :

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} \big|f(t)\big| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^1 \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t,$$

de la norme hilbertienne définie par

$$\|f\|_2 = \sqrt{\big[f(0)\big]^2 + \int_0^1 \big[f'(s)\big]^2\,\mathrm{d}s}$$

et des normes N_1 et N_2 définies par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \big|f(0)\big| + \|f'\|_\infty.$$

1. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$\forall\, f \in E, \quad N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_2(f).$$

2.a Les normes N_1 et N_2 dominent la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.b Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, sans être bornée pour N_1, ni pour N_2.

3. La norme $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$, mais il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_1$ sans être bornée pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_2.$$

La suite de fonctions de terme général $f_n = [t \mapsto \sin nt]$ est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ alors que $\|f_n\|_2 \sim n/\sqrt{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

87. Soient E, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi \in E$, une application positive, non identiquement nulle.

1. Les applications N et N_φ définies par

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

et par

$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

sont des normes sur E.

2. Ces normes sont équivalentes. En particulier,

$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) \leqslant \left(1 + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \cdot N(f).$$

88. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad \|P\| = |P(0)| + \sum_{k=1}^{n} |P(1/k)|.$$

Il existe deux réels a et b tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad a\|P\|_\infty \leqslant \|P\| \leqslant b\|P\|_\infty.$$

La valeur optimale de b est égale à $(n+1)$. La valeur optimale de a est supérieure à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^n}.$$

89. On considère l'espace E des fonctions rationnelles de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont tous les pôles appartiennent à $\mathbb{U}$, sur lequel on définit deux normes en posant

$$N_1(f) = \sup_{|z|=\frac{1}{2}} |f(z)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{|z|=2} |f(z)|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n(z) = \frac{z^n}{1+z^n}$$

appartient à E.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante, égale à 0, pour la norme N_1 et converge vers la fonction constante, égale à 1, pour la norme N_2.

V

Applications lipschitziennes

90. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset E$.

90.1 ✍ *Une application $f : \Omega \to F$ est k-**lipschitzienne** lorsque*

$$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E.$$

On note $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de Ω dans F.

90.2 ✍ *L'ensemble des applications **lipschitziennes** de Ω dans F est noté $\mathcal{L}(\Omega, F)$ et défini par :*

$$\mathcal{L}(\Omega, F) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}_+} \mathcal{L}_k(\Omega, F).$$

91. Propriétés des applications lipschitziennes

91.1 L'ensemble $\mathcal{L}(\Omega, F)$ est un espace vectoriel.

91.2 Si $f : \Omega \to F$ et $g : F \to G$ sont lipschitziennes, alors la composée $g \circ f : \Omega \to G$ est lipschitzienne.

91.3 Le produit d'une application lipschitzienne bornée par une application lipschitzienne bornée est une application lipschitzienne.

91.4 ➙ **Composition des limites**
Si l'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est lipschitzienne et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) \in F$.

92. Exemples

92.1 Une fonction constante est 0-lipschitzienne.

92.2 L'application $[x \mapsto \|x\|_E]$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

92.3 Pour tout $a \in E$, l'application $[x \mapsto \mathrm{d}(x,a)]$ est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

92.4 Si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme produit **[32.2]**, alors les applications

$$[(x,y,z) \mapsto x], \quad [(x,y,z) \mapsto y], \quad [(x,y,z) \mapsto z]$$

sont lipschitziennes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

93. ➙ *Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, l'application Id_E est lipschitzienne de (E, N_1) dans (E, N_2) et de (E, N_2) dans (E, N_1).*

94. ➙ *Suite de* **[70]** *– Soit A, une partie non vide de E. L'application $[x \mapsto \mathrm{d}(x, A)]$ est lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y).$$

V.1 Applications linéaires continues

95. ✍ *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. On note $\mathrm{L}_c(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires lipschitziennes de E dans F.*

96. L'ensemble $\mathrm{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel.

97. ➙ **Caractérisation de $\mathrm{L}_c(E, F)$**
Soit f, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'application f est lipschitzienne sur E.*
2. *Il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E.$$

3. *L'application f est bornée sur la sphère unité de E.*
4. *L'application f est bornée sur la boule unité fermée de E.*
5. *L'application f est bornée sur la boule unité ouverte de E.*
6. *L'application f est bornée au voisinage de l'origine.*

98. Méthodes
On démontrera dans le cours de Topologie qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne.

98.1 On démontre donc qu'une application linéaire T est continue sur E en prouvant l'existence d'une constante $k > 0$ telle que →**[97]**

$$\forall x \in E, \quad \|T(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

98.2 Réciproquement, on démontre qu'une application linéaire T n'est pas continue sur E en exhibant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E tels que

$$\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

99. Exemples

99.1 Que $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ soit muni de la norme $\|\cdot\|_1$, de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ ou de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$, la transposition est continue :

$$\forall M \in E, \quad \|M^\top\| \leqslant \|M\|.$$

99.2 Soient E, un espace préhilbertien réel et $x_0 \in E$. L'application $f = [x \mapsto \langle x_0 \mid x \rangle]$ est continue :

$$\forall x \in E, \quad |f(x)| \leqslant \|x_0\|\,\|x\|.$$

99.3 Si l'espace E des suites complexes convergentes est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, l'application L qui, à toute suite $u \in E$, associe sa limite $L(u)$ est continue :

$$\forall\, u \in E, \quad \big|L(u)\big| \leqslant \|u\|_\infty.$$

99.4 Si $E = \ell^\infty(\mathbb{K})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les endomorphismes T et D de E définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T(u)_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad D(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

sont continus :

$$\forall\, u \in E, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty, \quad \big\|D(u)\big\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

99.5 Exemples de formes linéaires sur $E = \mathscr{C}^0([0,1])$
On considère les formes linéaires définies par

$$V(f) = f(1) - f(0) \quad \text{et} \quad T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où φ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$.

1. Si E est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les formes linéaires V et T_φ sont continues :

$$\forall\, f \in E, \quad \big|V(f)\big| \leqslant 2\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \big|T_\varphi(f)\big| \leqslant \left[\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right]\|f\|_\infty.$$

2. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ de convergence en moyenne.
2.a La forme linéaire V n'est pas continue.
2.b La forme linéaire T_φ est continue :

$$\forall\, f \in E, \quad \big|T_\varphi(f)\big| \leqslant \|\varphi\|_\infty \, \|f\|_1.$$

3. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ de convergence en moyenne quadratique.
3.a La forme linéaire V n'est pas continue.
3.b La forme linéaire T_φ est continue.

V.2 Norme subordonnée

100. ✍ *Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, une application linéaire continue* **[97]**.
La **norme d'application linéaire** *de f, dite* **norme subordonnée** *aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, est définie par*

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

101. ➙ *L'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathrm{L}_c(E,F)$.*

102. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$.

102.1

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\, \|x\|_E.$$

102.2

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad |\lambda| \leqslant |||f|||.$$

103. ➙ *Si $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathrm{L}_c(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathrm{L}_c(E,G)$ et*

$$|||g \circ f|||_{E,G} \leqslant |||g|||_{F,G}\, |||f|||_{E,F}.$$

En particulier, l'application $|||\cdot|||$ est une norme sous-multiplicative **[28]** *sur $\mathrm{L}_c(E)$.*

104. Méthodes pratiques de calcul
La plupart du temps, on se contente de prouver qu'une application linéaire est continue et il suffit pour cela de trouver un majorant de la norme subordonnée **[104.1]**.
Pour calculer exactement la norme subordonnée, il faut ensuite minorer cette norme **[104.2]**, **[104.3]**.

104.1➙ *Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$. Si K est une constante réelle telle que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\, \|x\|_E$$

alors l'application linéaire f est continue et $|||f||| \leqslant K$.

104.2➙ *Si l'application linéaire $f : E \to F$ est continue et s'il existe un vecteur $x_0 \neq 0_E$ tel que*

$$\big\|f(x_0)\big\|_F = k\|x_0\|_E,$$

alors $|||f||| \geqslant k$.

104.3➙ *Si l'application linéaire $f : E \to F$ est continue et s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs* non nuls *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big\|f(x_n)\big\|_F}{\|x_n\|_E} = k,$$

alors $|||f||| \geqslant k$.

Extension aux matrices

105. On *admet* que, pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $K > 0$ (qui dépend de N et de A) telle que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant K\, N(X).$$

105.1 ✍ *Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La* **norme subordonnée** *à N de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par*

$$|||A||| = \sup_{N(X)=1} N(AX).$$

105.2 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant |||A|||\, N(X).$$

105.3➙ *Pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la norme subordonnée à N est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

V.3 Applications multilinéaires continues

106. On considère trois espaces vectoriels normés

$$(F, \|\cdot\|_F), \quad (G, \|\cdot\|_G) \quad \text{et} \quad (H, \|\cdot\|_H)$$

et une application bilinéaire $\varphi : F \times G \to H$.
L'espace vectoriel $E = F \times G$ muni de la norme produit :

$$\forall\, u = (x,y) \in E, \quad N^\infty(u) = \max\big\{\|x\|_F,\ \|y\|_G\big\}.$$

106.1 S'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G,$$

alors

$$\big\|\varphi(u+v) - \varphi(u)\big\|_H \leqslant C\big[N^\infty(v)\big]\big[N^\infty(v) + 2N^\infty(u)\big]$$

pour tout $(u,v) \in E \times E$.

106.2 Si φ est bornée au voisinage de $0_E = (0_F, 0_G)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G.$$

106.3➙ *Soient $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ et $(H, \|\cdot\|_H)$, trois espaces vectoriels normés et N^∞, la norme produit sur $F \times G$. Une application bilinéaire φ est continue de $(F \times G, N^\infty)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ si, et seulement si,*

$$\exists\, C \geqslant 0,\ \forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G.$$

107. Exemples fondamentaux

107.1 Sur tout espace préhilbertien, comme par exemple $\mathbb{R}^p$, le ***produit scalaire*** est une forme bilinéaire continue pour la norme associée à ce produit scalaire.

107.2 Quel que soit l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$, la ***multiplication externe***

$$[(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x]$$

est une application bilinéaire continue de $\mathbb{K} \times V$ dans V.
107.3 Soit V, une algèbre associative unitaire. Si la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative :

$$\forall (x, y) \in V, \quad \|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\|,$$

alors la ***multiplication interne***

$$[(x, y) \mapsto xy]$$

est une application bilinéaire continue de $V \times V$ dans V.
107.4 Si l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée **[100]** à la norme $\|\cdot\|$ sur E, alors l'application

$$[(f, x) \mapsto f(x)]$$

est une application bilinéaire continue de $\mathrm{L}_c(E) \times E$ dans E.

108. ➙ Généralisation admise
On considère des espaces vectoriels normés $(E_1, \|\cdot\|_1)$, …, $(E_n, \|\cdot\|_n)$. *L'espace produit*

$$E = E_1 \times \cdots \times E_n$$

est muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ **[30]**. *Une application n-linéaire*

$$\varphi \,:\, (E, \|\cdot\|_\infty) \to (F, \|\cdot\|_F)$$

est continue si, et seulement si,

$$\exists\, C \geqslant 0,\ \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad \big\|\varphi(x)\big\|_F \leqslant C \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_k.$$

109. Exemples
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique.
109.1 Pour $n = 3$, le ***produit vectoriel*** est une application bilinéaire continue et le produit mixte est une forme trilinéaire continue.
109.2 Inégalité d'Hadamard
Quels que soient les vecteurs u_1, …, u_n dans $\mathbb{R}^n$,

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|.$$

Entraînement

110. Questions pour réfléchir
1. L'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est-il un espace vectoriel ?
2. Si $0 \leqslant k \leqslant k'$, alors toute application k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne.
3. Soient E et F, deux espaces vectoriels isomorphes et φ, un isomorphisme de F sur E.
Pour toute norme N sur E, l'application $\|\cdot\| = N \circ \varphi$ est une norme sur F.
4. Si f et g sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$, alors $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$.
5. Si $f \in \mathrm{L}_c(E, F)$, alors $|||f|||$ est la constante de Lipschitz optimale **[116]** de f.

111. L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ des endomorphismes continus de E est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme choisie sur E.
On suppose que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'endomorphismes continus qui converge vers l'endomorphisme $\Phi \in \mathrm{L}_c(E)$. Alors

$$\forall\, x \in E, \quad \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = \Phi(x).$$

Applications lipschitziennes

112. Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est convexe.
113. La fonction $f \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = x - x^2$$

vérifie

$$\forall\, 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \quad \big|f(x) - f(y)\big| < |x - y|$$

et appartient à $\mathcal{L}_1([0,1], \mathbb{R})$. Mais quel que soit $0 \leqslant k < 1$, la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}_k([0,1], \mathbb{R})$. →**[116]**
114. Soit E, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. On considère l'application $f \,:\, E \to E$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

1. L'application f est injective.
2. L'image de f est la boule unité ouverte de E.
3. L'application f est 2-lipschitzienne **[125]**.

115. Soient $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et A, une partie non vide de E. On considère une application $f \,:\, A \to \mathbb{R}$ qu'on suppose k-lipschitzienne et on pose

$$\forall\, x \in E, \quad g(x) = \inf\big\{k\,\|x - y\| + f(y),\ y \in A\big\}.$$

1. Soit $x \in A$. Pour tout $y \in A$,

$$k\,\|x - y\| + f(y) \geqslant f(x)$$

donc le réel $g(x)$ est bien défini et égal à $f(x)$.
2. Soit $x \in A^c$. Il existe $x_0 \in A$ tel que

$$\forall\, y \in A, \quad k\,\|x - y\| + f(y) \geqslant f(x_0) - k\,\|x - x_0\|.$$

Le réel $g(x)$ est bien défini, donc g est une application de E dans $\mathbb{R}$ qui prolonge f.
3. L'application g est k-lipschitzienne (imiter **[94]**).

116. Constante de Lipschitz optimale
Soit $f \,:\, \Omega \to F$, une fonction lipschitzienne.
116.1 Il existe $k_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\big\{k \in \mathbb{R}_+ \,:\, f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\big\} = [k_0, +\infty[.$$

116.2✍ *Si* $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, *la* **constante de Lipschitz optimale** *de* f *est*

$$\min\big\{k \in \mathbb{R}_+ \,:\, f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\big\}.$$

116.3 Une fonction lipschitzienne est constante si, et seulement si, sa constante de Lipschitz optimale est nulle.
116.4 La constante de Lipschitz optimale des exemples **[92.2]** et **[92.3]** est égale à 1.
116.5 On peut voir la constante de Lipschitz optimale comme une borne supérieure.
Soit $\Omega \subset E$. Pour tout $(x, y) \in \Delta = \Omega \times \Omega \setminus \big\{(x, x),\ x \in \Omega\big\}$, on pose

$$T(x, y) = \frac{\big\|f(x) - f(y)\big\|_F}{\|x - y\|_E}.$$

1. Une fonction $f \,:\, \Omega \to F$ est lipschitzienne si, et seulement si, la fonction T est bornée sur Δ. Dans ce cas, la constante de Lipschitz optimale de f est la borne supérieure de T sur Δ.
2. La fonction T atteint-elle un maximum ? →**[113]**
3. L'application qui, à toute application $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, associe la constante de Lipschitz optimale de f est-elle une norme sur $\mathcal{L}(\Omega, F)$?

Applications linéaires continues

117. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$.

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F.$$

118. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, telle que $|||f||| = \max_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. Alors

$$|||f||| = \max_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

mais l'expression $\|f(x)\|_F$ n'atteint pas nécessairement un maximum sur la boule unité ouverte $[\|x\|_E < 1]$.

119. Soient E et F, deux espaces vectoriels normés. L'espace $\mathrm{L}_c(E,F)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée aux normes sur E et F. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues converge vers $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$:

$$\lim_{n\to+\infty} |||f - f_n||| = 0$$

et si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs converge vers $x \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\|_E = 0$$

alors la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F$.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x) - f_n(x_n)\|_F = 0$$

120. Norme d'un projecteur
Soit $p \in \mathrm{L}(E)$, un projecteur non identiquement nul.
120.1 Si le projecteur p est lipschitzien, alors $|||p||| \geqslant 1$.
120.2 Si E est un espace euclidien et si p est un projecteur orthogonal, alors il est lipschitzien et $|||p||| = 1$.

121. Soient u et v dans $\mathrm{L}_c(E)$. Si

$$|||u \circ v||| = |||u|||^2 \quad \text{et} \quad |||v \circ u||| = |||v|||^2,$$

alors $|||v||| = |||u|||$.

122. L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

1.
$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2.
$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leqslant |||A|||.$$

123. *Suite de* **[82]** –
1. Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$, alors la dérivation $D = [P \mapsto P']$ est un endomorphisme continu et $|||D||| = 1$.
2. Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ ou de la norme $\|\cdot\|_3$, alors l'endomorphisme D n'est pas continu.

124. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle sommable **[35.2]**. Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X],$$

on pose

$$\|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \quad \text{et} \quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k u_k.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et l'application φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$|||\varphi||| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

Applications bilinéaires et multilinéaires

125. Soient $(E, \|\cdot\|)$, (F, N_1), (G, N_2) et $(V, \|\cdot\|_V)$, quatre espaces vectoriels normés. On suppose que les applications

$$f : E \to F \quad \text{et} \quad g : E \to G$$

sont lipschitziennes et bornées.
Pour toute application bilinéaire et continue φ de l'espace produit $(F \times G, \|\cdot\|_\infty)$ dans V, l'application définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad h(x) = \varphi\big(f(x), g(x)\big)$$

est lipschitzienne.
Comparer avec **[91.3]** et **[114]**.

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

126. Sur l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe des normes sous-multiplicatives **[33.2]**, mais il n'existe pas de norme N telle que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B).$$

127. Pour $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(u) = \int_0^1 |x - ty| \,\mathrm{d}t.$$

1. L'application N est une norme sur $E = \mathbb{R}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$N(x,1) = \left|\begin{array}{ll} 1/2 - x & \text{pour } x \leqslant 0, \\ x^2 - x + 1/2 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 1/2 & \text{pour } x \geqslant 1. \end{array}\right.$$

2. Il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^2, \qquad a\,\|u\|_2 \leqslant N(u) \leqslant b\,\|u\|_2$$

(où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique). Le couple optimal est

$$(a,b) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\Big).$$

128. Soit E, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

1. L'application N est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$, on pose $g = f + 2f' + f''$. Alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t (t-s)e^s g(s)\,\mathrm{d}s.$$

3. Il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant a.N(f).$$

4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = t \sin nt$$

prouve que les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

129. Soient N_1 et N_2, deux normes sur un espace vectoriel réel E. On note B_k, la boule unité ouverte de E relative à la norme N_k (pour $k = 1$ ou 2). Les deux normes N_1 et N_2 sont égales si, et seulement si, les boules B_1 et B_2 sont égales.

130. L'application N définie sur l'espace vectoriel E des suites réelles sommables [**35.2**] par

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est une norme sur E si, et seulement si, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si tous ses termes sont strictement positifs.

131. Interversion des bornes
Nous allons considérer ici des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas nécessairement bornées.

131.1 Conventions
Avec les conventions suivantes, toute suite croissante tend vers sa borne supérieure et toute suite décroissante tend vers sa borne inférieure :

— Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, alors $\sup(A) = +\infty$.

— Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, alors $\inf(A) = -\infty$.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Que la partie A soit bornée ou non, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\sup(A)$ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\inf(A)$.

2. Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

3. Quels que soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \text{et} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

4. Les autres propriétés des bornes perdent tout intérêt pour des parties non bornées :

— On peut toujours majorer par $+\infty$ (ou minorer par $-\infty$), mais c'est sans aucune utilité ;

— Le passage au sup (resp. à l'inf) suppose l'existence d'un majorant (resp. d'un minorant) réel et est donc sans objet.

131.2 On considère une famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ et on pose

$$M = \sup_{(i,j)\in I\times J} U_{i,j},$$

que cette quantité soit réelle ou infinie.

5. Si M' est un réel tel que $M' < M$, alors il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que

$$M' < U_{i_0,j_0} \leqslant M$$

donc

$$M' < \sup_{i\in I}\sup_{j\in J} U_{i,j} \leqslant M \quad \text{et} \quad M' < \sup_{j\in J}\sup_{i\in I} U_{i,j} \leqslant M.$$

6. Pour toute famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, bornée ou non,

$$\sup_{i\in I}\sup_{j\in J} U_{i,j} = \sup_{j\in J}\sup_{i\in I} U_{i,j} \quad \text{et} \quad \inf_{i\in I}\inf_{j\in J} U_{i,j} = \inf_{j\in J}\inf_{i\in I} U_{i,j}.$$

131.3 Théorème de Fubini
Si $\sum x_n$ est une série de terme général *positif*, alors la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a un sens, que la série soit convergente ou divergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} x_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

7. Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels *positifs*. Quels que soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_{i,j} = \sum_{n=0}^{i}\sum_{p=0}^{j} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{j}\sum_{n=0}^{i} u_{n,p}.$$

Que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable ou non,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\Big) = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\Big).$$

132. Inégalité de Minkowski
Sur $\mathbb{K}^d$, on peut définir une famille de normes sur le modèle des trois normes fondamentales. De même, sur le modèle des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on peut définir une famille de normes de convergence en moyenne sur des sous-espaces de $\mathscr{C}^0(I)$.

132.1 Normes sur $\mathbb{K}^d$
Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\Big)^{1/p}.$$

1. L'***inégalité de Hölder*** [**49**] s'énonce sous la forme

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

où p et q sont deux réels conjugués : $1/p + 1/q = 1$.

1.a Que devient l'inégalité de Hölder pour $p = 2$?

1.b Analogue de l'inégalité de Hölder pour la norme $\|\cdot\|_1$?

2. L'***inégalité de Minkowski*** est une version de l'inégalité triangulaire.

2.a Quels que soient x et y dans $\mathbb{K}^d$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$$

2.b

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\|x + y\|_p^{p/q}$$

2.c L'application $[x \mapsto \|x\|_p]$ est une norme sur $\mathbb{K}^d$.

3. Soit $x \in \mathbb{K}^d$.

3.a Il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant d$ tel que $|x_i|$ soit maximal. Cet indice est-il unique ?

3.b

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p.$$

132.2 Normes naturelles sur des espaces de suites

4. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_k^p$ soit absolument convergente est un espace vectoriel qui contient $\ell^1(\mathbb{K})$. On pose

$$\forall\, u \in \ell^p(\mathbb{K}), \quad \|u\|_p = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\Big)^{1/p}.$$

5. Si $u \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $v \in \ell^q(\mathbb{K})$, alors la série $\sum u_k v_k$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

L'application $[u \mapsto \|u\|_p]$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$.

6. Pour toute suite sommable $u \in \ell^1(\mathbb{K})$,

$$\|u\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|u\|_p.$$

132.3 Normes sur $\mathscr{C}^0(I)$
Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $p > 1$, on note $\mathscr{L}_c^p(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^p soit intégrables sur I et on pose

$$\forall\, f \in \mathscr{L}_c^p(I), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On considère deux réels conjugués p et q.

7. **Inégalité de Hölder**
Si $f \in \mathscr{L}_c^p(I)$ et $g \in \mathscr{L}_c^q(I)$, alors le produit fg est continu et intégrable sur I et

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

8. **Inégalité de Minkowski**
Si f et g appartiennent à $\mathscr{L}_c^p(I)$, alors $f+g \in \mathscr{L}_c^p(I)$ et

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

9. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\mathscr{L}_c^p(I)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathscr{L}_c^p(I)$.

10. On suppose que I est un intervalle borné.

10.a
$$\forall\, p > 1, \quad \mathscr{L}_c^\infty(I) \subset \mathscr{L}_c^p(I)$$

10.b Soient $f \in \mathscr{L}_c^\infty(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle ouvert non vide $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset I$ tel que

$$\forall\, x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\,, \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

10.c
$$\forall\, f \in \mathscr{L}_c^\infty(I), \quad \|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$$

Pour aller plus loin

133. On note E, le sous-espace de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les applications

$$e_\lambda = \left[x \mapsto e^{\lambda x}\right]$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'application N définie par

$$\forall\, f \in E, \qquad N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$$

est une norme sur E.

134. Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose

$$N(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 f(t) t^n \,\mathrm{d}t \right|.$$

L'application N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

135. Normes sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1.a Le ***rayon spectral*** défini par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1.b Étendu à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral n'est plus une norme.

2. L'application définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \lambda^2}$$

(où m_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ) est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: la norme induite par restriction de la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$M_p = I_n + \mathrm{Diag}(1/p, \ldots, n/p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La suite $(M_p)_{p \geqslant 1}$ converge vers I_n pour toute norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application N définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \sqrt{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^2}$$

n'est donc pas une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.