

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

1.1 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$

1.2 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1}.$

1.3 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n}.$

1.4 $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k.$

2. Sommation télescopique

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe.

$$\forall p \geq n, \quad \sum_{k=n}^p (x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n.$$

3. Série géométrique

3.1 $\forall m \leq n, \quad \sum_{k=m}^n 1^k = n - m + 1.$

3.2 Si q est un complexe différent de 1, alors

$$\forall m \leq n, \quad \sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

3.3 Dans toute algèbre associative unitaire,

$$(q - 1) \times \left(\sum_{k=m}^n q^k \right) = \left(\sum_{k=m}^n q^k \right) \times (q - 1) = q^{n+1} - q^m.$$

4. Séries et dérivation discrète

L'application Δ définie par

$$\Delta(u)_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad \Delta(u)_n = u_n - u_{n-1}$$

est un endomorphisme de l'espace $\ell^0(\mathbb{C})$ des suites complexes. L'application σ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(u)_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est un endomorphisme de $\ell^0(\mathbb{C})$.

I

Séries dans un espace vectoriel de dimension finie

5. Les séries sont des suites d'un genre particulier : l'idée fondamentale est que les séries sont aux suites ce que les primitives sont aux fonctions.

5.1 \Leftarrow La série de terme général u_n est une suite notée $\sum u_n$.

5.2 \Leftarrow Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

est la n -ième **somme partielle** de la série $\sum u_n$.

5.3 Étudier la série $\sum u_n$, c'est étudier les propriétés de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles qui se déduisent du terme général u_n .

6. Pour que les sommes partielles soient définies, il suffit que les termes u_n de la série appartiennent à un espace vectoriel. On considérera dorénavant que le terme général u_n appartient à un espace vectoriel E , lequel est muni d'une norme $\|\cdot\|$, ce qui permet de définir les notions de *suite convergente* et de *suite divergente*.

7. \Leftarrow Les séries dont le terme général u_n appartient à l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ ou à $E = \mathbb{C}$ sont dites **séries numériques**.

1.1 Nature d'une série

8. Étudier la **nature d'une série**, c'est chercher si elle est convergente ou divergente.

8.1 \Leftarrow Une série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente : la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, il existe un vecteur $S \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_E = 0.$$

8.2 \Leftarrow La **somme d'une série convergente** est la limite de la suite de ses sommes partielles. Elle est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

8.3 \Leftarrow Une série est **divergente** quand elle n'est pas convergente.

9. \rightarrow Convergence des séries télescopiques

La série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas,

$$\forall n_0, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right) - x_{n_0}.$$

10. Restes d'une série convergente

Il faut considérer la n -ième somme partielle d'une série convergente comme une valeur approchée de sa somme. Le **reste d'ordre n** est alors l'erreur absolue commise en assimilant la somme à la n -ième somme partielle.

10.1 \Leftarrow Soit $\sum u_n$, une série convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le **reste d'ordre N** est le vecteur R_N défini par la relation suivante.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^N u_n + R_N$$

10.2 \Leftarrow Par analogie avec la relation de Chasles, le **reste d'ordre N** est aussi noté

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Le terme u_{N+1} , premier terme du reste d'ordre N , est appelé **premier terme négligé**.

10.3 \rightarrow La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente est une suite de limite nulle.

11. Divergence grossière

11.1 \rightarrow Le terme général d'une série convergente tend vers 0_E .

11.2 ∇ Une série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** lorsque son terme général ne tend pas vers 0_E .

11.3 \rightarrow Toute série grossièrement divergente est divergente.

11.4 Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0_E .

12. Linéarité de la somme

12.1 ∇ La somme des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $(u_n + v_n)$.

12.2 ∇ La combinaison linéaire $\lambda \sum u_n + \sum v_n$ est la série de terme général $(\lambda u_n + v_n)$.

12.3 \rightarrow Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors toute combinaison linéaire $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est une série convergente.

12.4 \rightarrow La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.

12.5 \rightarrow L'application qui, à une série convergente, associe sa somme est une forme linéaire.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

12.6 \rightarrow On suppose que la série complexe $\sum u_n$ est convergente, de somme S . Alors les séries $\sum \Re(u_n)$ et $\sum \Im(u_n)$ sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) = \Re(S) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n) = \Im(S).$$

I.2 Convergence absolue

13. On considère des séries dont le terme général appartient à un espace vectoriel E , lequel est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

13.1 ∇ Une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série de terme général positif $\sum \|u_n\|$ est convergente.

13.2 Dans le cas d'une série numérique (c'est-à-dire $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$), on doit écrire $|u_n|$ au lieu de $\|u_n\|$.

13.3 \rightarrow Une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est absolument convergente.

14. \rightarrow Théorème fondamental

Soit $\sum u_n$, une série dont le terme général appartient à un espace vectoriel E .

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si la dimension de E est finie, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

15. \rightarrow Cas des séries numériques

Soit $\sum u_n$, une série numérique dont le terme général est de signe constant (à partir d'un certain rang).

Une telle série est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

Séries semi-convergentes

16. ∇ Une série $\sum u_n$ est **semi-convergente** lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

17. \rightarrow La somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente est semi-convergente.

Théorème de comparaison

18. Les différents théorèmes de comparaison, qui relient tous l'ordre de grandeur du terme général u_n à celui du terme général d'une série connue $\sum v_n$, servent à vérifier si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

18.1 Il est donc impossible d'appliquer une version quelconque du Théorème de comparaison pour justifier la convergence d'une série semi-convergente.

18.2 Méthode

Il suffit à chaque fois d'étudier l'ordre de grandeur du terme général pour conclure.

19. La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ est en fait une comparaison entre les quantités positives $\|u_n\|$ et $\|v_n\|$:

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \iff \|u_n\| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(\|v_n\|).$$

En pratique, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.

20. Condition suffisante de convergence absolue

20.1 \rightarrow Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

20.2 Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

20.3 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

20.4 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente.

21. \rightarrow Condition nécessaire de convergence absolue

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, alors $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

22. Critère de convergence absolue

En pratique, la comparaison par équivalent n'a d'utilité que pour les séries numériques.

22.1 \rightarrow Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\sum v_n$ est absolument convergente.

22.2 \rightarrow On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Règle de Riemann

23. On applique ici les différentes versions du Théorème de comparaison en prenant une série de Riemann (convergente ou divergente) comme série de référence.

24. ∇ La fonction ζ de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

25. \rightarrow S'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

26. \rightarrow S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que

$$\frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}(\|u_n\|),$$

alors $\sum \|u_n\|$ diverge et la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

27. \rightarrow S'il existe $\ell \neq 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha},$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

28. \rightarrow S'il existe $\ell \neq 0$ et $\alpha \leq 1$ tels que

$$u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha},$$

alors $\sum u_n$ diverge.

I.3 Règle de D'Alembert

29. Comparaison logarithmique

La règle de D'Alembert donne une condition simple pour comparer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à une suite géométrique. On la formule comme une condition suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente ou pour que cette série soit grossièrement divergente.

29.1 Si u_n et v_n ne s'annulent pas et si

$$\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leq \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|}$$

à partir d'un certain rang, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

29.2 S'il existe $0 < q < 1$ tel que

$$\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leq q$$

à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(q^n)$$

et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

29.3 S'il existe $q > 1$ tel que

$$q \leq \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|}$$

à partir d'un certain rang, alors

$$q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$$

et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

30. → **Condition suffisante de convergence absolue**
Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} = \ell$$

et si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

31. → **Condition suffisante de divergence grossière**
Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} = \ell$$

et si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

32. Lorsque la limite ℓ est égale à 1, on doit s'abstenir de conclure. →[36]

33. → **Séries de Poisson**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n/n!$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

34. → **Exponentielle de matrice**

L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ est muni de la norme produit. Quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^n\|_\infty \leq d^{n-1} \cdot \|A\|_\infty^n$$

et la série de matrices

$$\sum \frac{1}{n!} \cdot A^n$$

est absolument convergente.

Défauts de la règle de D'Alembert

35. Pour tout entier n pair, on pose $u_n = 2^{-n}$ et pour tout entier n impair, on pose $u_n = 3^{-n}$.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, mais la règle de D'Alembert ne permet pas de le démontrer.

36. Si $\sum u_n$ est une série de Riemann, convergente ou divergente, alors le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1 : la règle de D'Alembert ne s'applique à aucune série de Riemann.

La règle de Riemann [23] est donc plus souvent utilisable que la règle de D'Alembert — ce qui ne signifie pas qu'elle soit toujours plus pratique à utiliser.

I.4 Applications de la convergence absolue

37. Constante d'Euler

Les *nombre harmoniques*

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

sont les sommes partielles de la *série harmonique*.

37.1 La série

$$\sum \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

est absolument convergente.

37.2 Il existe une constante γ , dite *constante d'Euler*, telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

→[99]

38. Formule de Stirling

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$w_n = \ln \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}.$$

38.1 La série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est absolument convergente.

38.2 → Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$n! \sim Kn^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

La constante K est égale à $\sqrt{2\pi}$.

→[41]

38.3 Pour toute suite d'entiers $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$,

$$u_n! \sim \sqrt{2\pi} u_n^{u_n} e^{-u_n} \sqrt{u_n}.$$

38.4

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

39. Contractions d'un segment

39.1 ↯ Une application est **contractante** lorsqu'elle est lipschitzienne et admet une constante de Lipschitz $k < 1$.

39.2 Soient I , un intervalle de \mathbb{R} ; $f : I \rightarrow I$, une application contractante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite définie par $u_0 \in I$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

39.3 Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe, qui est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quelle que soit la valeur initiale u_0 choisie.

Entraînement

40. Questions pour réfléchir

1. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ sont de même nature. On peut donc étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au moyen de la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$.

2. Pourquoi les restes d'une série divergente ne sont-ils pas définis ?

3. Nature de la série $\sum n^{(-1)^n}$.

4. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge grossièrement, alors $\sum v_n$ diverge grossièrement.

5. Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors les séries $\sum v_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont de même nature.

6.a Que dire de la somme de deux séries divergentes ?

6.b Que dire de $\Re(u_n)$ lorsque $\sum u_n$ est divergente ?

7. Discuter la nature de la série $\sum (u_n + v_n + w_n)$ en fonction de la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

8. La série $\sum a_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum (-1)^n a_n$ est absolument convergente.

9. Une série de Riemann est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

10. Une série géométrique est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

11. Une série géométrique est divergente si, et seulement si, elle est grossièrement divergente.
 12. Soit $\sum u_n$, une série réelle.
 12.a Si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.
 12.b Si $\sum u_n$ est semi-convergente, que dire du signe de u_n ?
 13. La somme de deux séries semi-convergentes est-elle encore une série semi-convergente?

41. Intégrales de Wallis
 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{2n+1} \binom{2n}{n}^{-1}$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, →[38.4]

$$\binom{2n}{n}^2 \sim \frac{2^{4n}}{n\pi}.$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{2}{\pi}$$

42. Calculs explicites

42.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cos n\pi = 2/3$$

42.2

$$\forall x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

42.3 Soit $x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin(\frac{nx}{2}) \sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$
- $$\sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\cos(\frac{nx}{2}) \sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

2. Pour $x = 0$, on retrouve la valeur de ces sommes partielles par passage à la limite.
 3. Si la série de terme général $u_n = \sin nx$ est convergente, alors u_n tend vers 0 et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos x + \cos nx \sin x,$$

alors $\sin x = 0$.

4. Pour tout $x \neq 0 \pmod{\pi}$, les séries $\sum \sin nx$ et $\sum \cos nx$ sont grossièrement divergentes quoique leurs sommes partielles restent bornées.

43. Comparaison à une série géométrique

Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$\sum \frac{\lambda^n}{1 + \lambda^{2n}} \quad \sum \frac{\lambda^{2n}}{1 + \lambda^{2n}} \quad \sum \frac{1}{1 + \lambda^{2n}}$$

44. Calculs de sommes

Il faut parfois calculer une décomposition en éléments simples pour faire apparaître une somme télescopique.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = 4 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

45. Fonction ζ de Riemann

1. La fonction ζ [24] est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$.
 2. En admettant que $\zeta(2) = \pi^2/6$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

Pouvait-on prévoir le signe de la dernière somme?

- 46.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = x^n/n$.
 1. La série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $-1 \leq x < 1$.
 2. Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [-1, 0], \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \alpha_n.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ est défini sur $[0, 1[$ mais n'est pas borné sur cet intervalle.

47. Soit $\sum a_n$, une série absolument convergente.

47.1 La série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $|x| \leq 1$.

47.2 La série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

48. Développements asymptotiques

Un développement asymptotique du terme général permet parfois de décomposer une série en somme de séries dont la nature est connue.

48.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

La série $\sum (-1)^n u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $a = -2$ et $b = 1$. Dans ce cas, sa somme est égale à $-\ln 2$.

48.2 Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

est-elle convergente? Quelle est sa somme?

48.3 Nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

en fonction du réel α .

49. Calculs de sommes [37]

49.1 Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = \frac{H_n}{n}.$$

49.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

49.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \ln 2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln 2$$

49.4 Pour tout entier $p \geq 1$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

50. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (2 - \sqrt{3})^n \quad \text{et} \quad v_n = (2 + \sqrt{3})^n.$$

Comme $u_n + v_n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux séries $\sum \sin \pi u_n$ et $\sum \sin \pi v_n$ sont absolument convergentes.

51. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

On peut démontrer que la série $\sum u_n$ diverge de deux manières.

51.1 À partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

donc il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq K v_n.$$

51.2 Comme la série

$$\sum \left(\frac{2}{3} \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

est absolument convergente, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \sim \frac{A}{n^{2/3}}.$$

52. Nature des séries suivantes.

$$\begin{array}{ll} \sum \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n} & \sum \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & \sum \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{n} \right) \\ \sum \frac{1}{n \cos^n \theta} & \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \\ \sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) & \sum \cos(\pi \sqrt{n^2+n+1}) \\ \sum \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} & \sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} \\ \sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} & \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} \end{array}$$

53. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+e^t} dt.$$

53.1 Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq K \int_0^1 t^n dt$$

mais on ne peut pas déduire la nature de la série $\sum u_n$ de la relation $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

53.2 La suite de terme général $(n+1)u_n$ tend vers $e/1+e$.

53.3 La série $\sum (-1)^n u_n$ est semi-convergente.

53.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum u_n x^n$ converge si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$.

II

Intégrales sur $I = [a, +\infty[$

54. On suppose connu le concept d'intégrale pour une fonction continue par morceaux sur un segment.

54.1 On s'intéresse ici à une première généralisation de ce concept en l'étendant aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a, +\infty[$.

Le maniement de ces intégrales est très semblable à celui des séries absolument convergentes.

54.2 On étudiera plus tard le cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, qui est très semblable à celui des familles sommables.

54.3 On se limite aux fonctions à valeurs réelles ou complexes : le symbole \mathbb{K} désignera tantôt \mathbb{R} , tantôt \mathbb{C} .

II.1 Convergence d'une intégrale généralisée

55. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par morceaux.

55.1 \Leftrightarrow L'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est dite **convergente** lorsque la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_a^x f(t) dt \right]$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ce cas, cette limite est notée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

55.2 Lorsque la fonction F tend vers l'infini ou n'a pas de limite, on dit que l'intégrale généralisée de f est **divergente**.

Cette expression signifie en fait que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ n'existe pas.

55.3 Si f est à valeurs positives, alors la fonction F est croissante.

L'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est donc convergente si, et seulement si, la fonction F est majorée.

On peut noter, dans ce cas particulier,

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = +\infty$$

le fait que l'intégrale généralisée de f soit divergente.

55.4 \rightarrow Théorème de comparaison

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ telles que

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

et si l'intégrale généralisée de g sur l'intervalle I est convergente, alors l'intégrale généralisée de f sur I est convergente et

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

56. Exemples fondamentaux

Les exemples les plus utiles sont des fonctions positives. \rightarrow [58.4]

56.1 L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, le réel α est strictement supérieur à 1. Dans ce cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

56.2 L'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ est convergente si, et seulement si, le réel a est strictement positif. Dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}.$$

57. Supposons que l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ soit convergente.

57.1 Pour tout $x \geq a$, l'intégrale généralisée de f sur $[x, +\infty[$ est aussi convergente et

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

57.2 Par analogie avec les séries, l'intégrale (usuelle)

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est appelée *intégrale partielle* et l'intégrale généralisée

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est appelée *reste*.

57.3 Comme pour les séries convergentes, le reste tend vers 0 au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

57.4 → Généralisation du Théorème fondamental

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue. Si l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est convergente, alors le reste

$$\left[x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt \right]$$

est une fonction de classe \mathcal{C}^1 dont la dérivée est égale à $-f$.

57.5 Le reste R est la primitive de $-f$ qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

II.2 Fonctions intégrables

58. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par morceaux.

58.1 La fonction $|f|$ est une fonction continue par morceaux et positive.

58.2 Par analogie avec les séries, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

est *absolument convergente* lorsque l'intégrale généralisée de la fonction positive $|f|$ est convergente.

58.3 \Leftrightarrow Une fonction continue par morceaux $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est dite *intégrable sur l'intervalle* $I = [a, +\infty[$ lorsque l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

est convergente.

58.4 Une fonction de signe constant f est intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$ si, et seulement si, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

est convergente.

→[56]

59. → Théorème de comparaison (version globale)

Soit f , une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe une fonction intégrable g telle que

$$\forall t \in [a, +\infty[, \quad |f(t)| \leq g(t),$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

60. → Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, alors l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est convergente et

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt.$$

Fonctions localement intégrables

61. On considère une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

61.1 Une propriété est vraie *au voisinage de* $+\infty$ lorsqu'elle est vraie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (pour un réel a convenablement choisi).

61.2 \Leftrightarrow La fonction f est *intégrable au voisinage de* $+\infty$ si, et seulement si, il existe un intervalle $[a, +\infty[$ sur lequel f est intégrable.

61.3 → Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

62. Théorème de comparaison (versions locales)

La version locale du Théorème de comparaison est plus simple à appliquer que la version globale [59].

62.1 → Soit f , une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$. S'il existe une fonction g , intégrable au voisinage de $+\infty$, telle que

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(g(t)),$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

62.2 → Soit f , une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$. Si

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t),$$

alors : f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

63. Exemples

63.1 La fonction $\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

63.2 La fonction $\left[t \mapsto \exp(-\sqrt{t}) \right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

63.3 La fonction $\left[t \mapsto \ln(1+e^{-t}) \right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

63.4 Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^n} \right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Intégrales semi-convergentes

64. \Leftrightarrow Si l'intégrale généralisée de f est convergente bien que la fonction f ne soit pas intégrable, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

est *semi-convergente*.

65. Exemple fondamental

La fonction continue f définie par $f(0) = 1$ et

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas intégrable sur $I = [0, +\infty[$ mais l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

est convergente.

Entraînement

66. En posant

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$$

on définit une fonction φ sur \mathbb{R} et

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-x^2}).$$

67. Soient $0 < a < b$. L'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos xt \, dt$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

68. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} |\sin t| \, dt = \frac{e^{\lambda\pi} + 1}{(1 + \lambda^2)(e^{\lambda\pi} - 1)}.$$

69. Soit f , une fonction continue et strictement positive sur $I = [0, +\infty[$. On suppose qu'il existe un réel $0 \leq \alpha < 1$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \alpha.$$

Alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

70. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction f définie par

$$f(t) = \exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1$$

est-elle continue par morceaux sur $I = [0, +\infty[$? Cette fonction est intégrable sur I pour $1 < \alpha < 2$.

71. La fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} \, dt$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

car l'expression $\frac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

III

Séries numériques

III.1 Critère spécial des séries alternées

72. \Leftarrow La série numérique (réelle) $\sum u_n$ est **alternée** lorsque le produit $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

73. \rightarrow On considère une série numérique alternée $\sum u_n$.

Si la suite de terme général $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, alors

1. la série $\sum u_n$ est convergente;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n est du signe du premier terme négligé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n \times u_{n+1} \geq 0$$

3. et dominé par le premier terme négligé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

74. En particulier, si la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées [73], alors la somme de la série est du signe du premier terme et son module est inférieur au module du premier terme.

75. La **transformation d'Abel** permet d'étendre le critère spécial des séries alternées aux séries complexes.

76. **Transformation d'Abel**

Étant données deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

76.1 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^N u_n v_n = U_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}).$$

76.2 Si la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n v_n$ est somme d'une suite de limite nulle et d'une série absolument convergente.

76.3 Si la série $\sum z_n$ est convergente, alors la série $\sum z_n/n$ est convergente.

76.4 Pour tout $0 < x < 2\pi$, la série $\sum \cos nx/n$ est convergente.

III.2 Comparaison d'une série et d'une intégrale

77. L'intégrale d'une fonction sur un intervalle étant une sorte de somme, il est souvent fructueux de comparer une intégrale à une somme.

Cela n'est possible *facilement* que dans le cas des fonctions monotones.

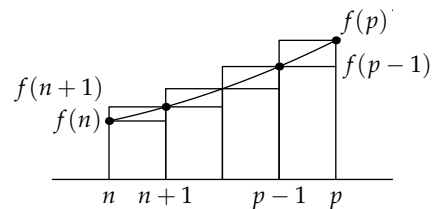
78. **Cas d'une fonction croissante**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux et croissante.

78.1 Si $[a, a+1] \subset I$, alors

$$f(a) \leq \int_a^{a+1} f(x) \, dx \leq f(a+1).$$

78.2



Étant donnés deux entiers $n \leq p$ tels que $[n, p] \subset I$,

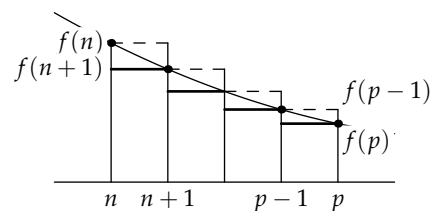
$$\sum_{k=n}^{p-1} f(k) \leq \int_n^p f(x) \, dx \leq \sum_{k=n+1}^p f(k)$$

et donc

$$f(n) + \int_n^p f(x) \, dx \leq \sum_{k=n}^p f(k) \leq \int_n^p f(x) \, dx + f(p).$$

79. **Cas d'une fonction décroissante**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux et décroissante.



Étant donnés deux entiers $n \leq p$ tels que $[n, p] \subset I$,

$$\sum_{k=n+1}^p f(k) \leq \int_n^p f(t) \, dt \leq \sum_{k=n}^{p-1} f(k).$$

et donc

$$f(p) + \int_n^p f(t) \, dt \leq \sum_{k=n}^p f(k) \leq f(n) + \int_n^p f(t) \, dt.$$

80. Soit $f : [n, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur l'intervalle $I = [n, +\infty[$.

La fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum f(k)$ est convergente et dans ce cas

$$\int_n^{+\infty} f(t) \, dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(t) \, dt.$$

Applications

81. Séries convergentes

81.1 Pour $\alpha > 1$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

81.2 Pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

81.3 Lorsque α tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{3^\alpha}\right).$$

82. Séries divergentes

82.1 Équivalent des nombres harmoniques [37]

$$H_n \sim \ln n$$

82.2 Lorsque n tend vers $+\infty$, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

82.3

$$\ln n! \sim n \ln n$$

82.4 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \sim \frac{p}{n}$$

alors que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \sim \ln 2.$$

82.5

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

83. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum a^{H_n}$ converge pour $a < 1$ et diverge grossièrement pour $a \geq 1$. [82.1]

84.

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^2 k} \sim \frac{1}{\ln n}$$

85.

$$\sum_{k=2}^n \ln^2 k \sim n \ln^2 n$$

86.

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \ln(\ln n) + \mathcal{O}(1)$$

87.

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1)$$

88. La somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

est définie pour tout $x > 0$. De plus,

$$\forall x > 0, \quad S(x) \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \leq S(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$$

donc S tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et $S(x) \sim 2/x^2$ au voisinage de $x = 0$.89. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

89.1 Par comparaison avec une intégrale, la suite de terme général

$$u_n = S_n - \ln(\ln n)$$

est bornée.

89.2 La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument et il existe une constante c telle que

$$S_n - \ln(\ln n) - c \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2 \ln k}$$

donc

$$S_n = \ln(\ln n) + c + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

III.3 Sommatation des relations de comparaison

90. On considère ici une série $\sum u_n$ dont le terme général est comparable (avec \mathcal{O} , o ou \sim) au terme général d'une suite positive $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de telle sorte qu'on puisse en déduire la nature de la série $\sum u_n$.En pratique, $\sum a_n$ est une série géométrique ou une série de Riemann.

Séries convergentes

91. Dans le cas où les deux séries $\sum u_n$ et $\sum a_n$ sont convergentes, on compare les ordres de grandeur de leurs restes, qui sont des infiniment petits.92. Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|\right).$$

93. \rightarrow Soit $\sum a_n$, une série convergente de terme général positif.93.1 Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| = \mathcal{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right).$$

93.2 Si $u_n = o(a_n)$, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right).$$

93.3 Si $u_n \sim a_n$, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right).$$

Séries divergentes

94. Dans le cas de séries divergentes dont les termes généraux sont de signe constant, on compare les ordres de grandeur des sommes partielles, qui sont des infiniment grands.

95. On considère deux suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$.

95.1 S'il existe deux réels A et B tels que

$$0 \leq x_n \leq Ay_n + B$$

à partir d'un certain rang, alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

95.2 On suppose que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et un réel $A_\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \quad 0 \leq x_n \leq \frac{\varepsilon}{2}y_n + A_\varepsilon.$$

Alors $x_n = o(y_n)$.

96. \rightarrow Soit $\sum a_n$, une série divergente de terme général positif. On note S_n (resp. A_n), les sommes partielles de la série $\sum u_n$ (resp. de la série $\sum a_n$).

96.1 Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(A_n)$.

96.2 Si $u_n = o(a_n)$, alors $S_n = o(A_n)$.

96.3 Si $u_n \sim a_n$, alors $S_n \sim A_n$.

Applications

97. **Calcul approchée de la somme d'une série convergente**
Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors on peut considérer que la somme partielle d'ordre n est une valeur approchée de la somme de la série, l'erreur commise étant le reste d'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + R_n.$$

97.1 Si $u_n = \mathcal{O}(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(1/n^{\alpha-1})$.

97.2 Si $u_n = \mathcal{O}(q^n)$ avec $0 < q < 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(q^n)$.

98. Théorème de Cesaro

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell.$$

99. Constante d'Euler [37]

99.1

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ell n \frac{k+1}{k} \right) \sim \frac{1}{2n}$$

99.2

$$H_n = \ell n n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

100. Suites récurrentes et équivalents

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle, qui vérifie une relation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction dérivable sur un voisinage de 0. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = f'(0)$$

et la valeur de $f'(0)$ permet de préciser l'ordre de grandeur de l'infiniment petit u_n .

100.1 Convergence géométrique

Si $|f'(0)| < 1$, alors il existe $0 < q < 1$ tel que

$$u_n = o(q^n).$$

100.2 Convergence rapide

On suppose que $f'(0) = 0$.

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 plus vite que toute suite géométrique.

2. Si f est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de 0, alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|f(x)| \leq Kx^2$$

au voisinage de 0 et $u_n = \mathcal{O}(q^{2^n})$ pour un certain réel $0 < q < 1$.

100.3 Convergence lente

Si $f'(0) = 1$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n + o(u_n).$$

Avec un développement limité plus précis de f , on peut trouver un réel α tel que la suite de terme général

$$v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$

converge vers une limite finie non nulle ℓ .

1. Le réel α , s'il existe, est nécessairement négatif.

2. Si v_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $u_n \sim \sqrt[n]{n\ell}$.

3. Si $f(x) = \ell n(1+x)$, alors $\alpha = -1$ et $u_n \sim 2/n$.

4. Si $f(x) = \sin x$, alors $\alpha = -2$ et $u_n \sim \sqrt[3]{3/n}$.

Entraînement

101. Questions pour réfléchir

1. Soit f , une fonction continue et décroissante telle que la série $\sum f(n)$ converge. Pourquoi la comparaison de cette série avec une intégrale donne-t-elle une estimation médiocre de la somme de cette série ?

2. Peut-on déduire de [82.3] un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini ?

3. Suite de [93] – Pourquoi ne compare-t-on pas les sommes partielles des deux séries ?

4. On suppose qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_n \leq Ay_n + B.$$

Peut-on en déduire que $x_n = \mathcal{O}(y_n)$?

102. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite décroissante et positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 2R_p \geq 2p.u_{2p} \geq 0$$

et nu_n tend vers 0.

103. Existence et signe des sommes suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

104. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = o\left(\frac{1}{n!}\right).$$

105. On considère les séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

La série $\sum v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, les termes généraux u_n et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère spécial des séries alternées ne peut pas s'appliquer à la série $\sum u_n$. Cependant, la série $\sum u_n$ est convergente et son reste est $\mathcal{O}(1/n)$ quand n tend vers $+\infty$.

106. La série de terme général

$$u_n = \ell n [2n + (-1)^n] - \ell n 2n$$

est convergente sans être absolument convergente.

107. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ell n k}{k}.$$

107.1 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\ell n^2 n}{2}.$$

Comme la série de terme général

$$u_n = \frac{\ell n n}{n} - \frac{\ell n^2 n - \ell n^2 (n-1)}{2}$$

est absolument convergente, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$S_n = \frac{\ell n^2 n}{2} + c + o(1).$$

107.2 Il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=1}^n k^{1/k} = n + \frac{\ell n^2 n}{2} + K + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

108. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=2}^n \ell n^2 k.$$

La série $\sum 1/u_n$ est convergente. [84], [85]

109. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

Comme la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{\ell n 2}{2}$ et que

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{32n^3},$$

alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell n 2}{2} - \frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

110. Application de la règle de Riemann

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et, si } \alpha > 1, \quad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Nature des séries $\sum R_n(\alpha)$ et $\sum R_n(\alpha)/S_n(\alpha)$. [81.2]
2. Suite de [82.2] – Nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + S_n(1/2)}.$$

3. Suite de [82.5] – On pose $u_n = n^\alpha S_n(-1/2)$. Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

111. Comparer l'ordre de grandeur du reste d'ordre n des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

qu'on peut déduire du critère spécial des séries alternées [73] avec celui qu'on peut déduire du théorème [93].

112. Si $a_n = (-1)^n$ et $u_n = 1/n$, alors $u_n = o(a_n)$ et la série $\sum a_n$ est divergente. Cependant,

$$\sum_{k=1}^n u_k \sim \ell n n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n a_k = \mathcal{O}(1).$$

Expliquer.

113. Série harmonique alternée

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Le réel R_0 est égal à $-\ell n 2$. [49.2]
2. Pour tout $n \geq 1$,

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

3. Le reste R_n est équivalent à $(-1)^{n+1}/2n$ et la série $\sum R_n$ est semi-convergente.

114. Il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

115. Suite de [37] – Il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}} = \ell n n + C + o(1).$$

116. Suite de [37] – Il existe un réel λ tel que

$$\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}.$$

117. Comparaison avec des intégrales

1. La fonction ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{3n}\right).$$

2. La fonction ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1 et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (\alpha - 1)\zeta(\alpha) = 1.$$

3. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

118. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{x^2 + k^2}.$$

1. Pour tout $x > 0$, la série $\sum u_k(x)$ converge. On note $S(x)$, sa somme et

$$\forall x > 0, \quad R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x).$$

2. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}.$$

3. Comparer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

4. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) \geq \text{Arctan} \frac{x}{n}.$$

S'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad 0 \leq R_n(x) \leq M_n,$$

alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

119. Pour tout $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}.$$

1. Il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\forall |h| \leq \frac{1}{2}, \quad |S(1+h) - S(1)| \leq K|h|.$$

2. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = C.$$

3. Pour x voisin de 0, on a $S(x) \sim 1/x$.

4. Il existe deux réels a et b tels que

$$S(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \mathcal{O}(1/x^4)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

120. La somme

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

est définie pour tout $x > 0$ et

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Obtient-on un résultat aussi précis en comparant $G(x)$ à une intégrale?

121. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ diverge. On note S_n , la n -ième somme partielle de cette série.

1. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, à partir d'un certain rang,

$$0 \leq \frac{u_n}{S_n} \leq \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

et si u_n/S_n tend vers 0, alors

$$\frac{u_n}{S_n} \sim \ell n \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

2. Pour $\alpha > 1$,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

3. Nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ en fonction du réel α .

122. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et tend vers 0.

2. La série $\sum u_n$ diverge.

3. Il existe une fonction dérivable f telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On en déduit [100.3] que $u_n \sim \sqrt{1/2n}$, ce qui confirme la divergence de la série $\sum u_n$.

IV

Ensembles dénombrables

123. Les ensembles dénombrables sont en quelque sorte les plus petits des ensembles infinis.

123.1 \nrightarrow Un ensemble E est **dénombrable** s'il existe une bijection de \mathbb{N} sur E .

123.2 L'ensemble \mathbb{N} est dénombrable.

123.3 Si E est dénombrable, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts tels que

$$E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **énumération** de E .

123.4 L'application

$$\left[n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right]$$

est une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{Z} : l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs est dénombrable.

124.1 \nrightarrow Un ensemble E est **au plus dénombrable** lorsqu'il existe une bijection d'une partie de \mathbb{N} sur E .

124.2 Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.

124.3 \rightarrow S'il existe une injection de E dans \mathbb{N} , alors l'ensemble E est au plus dénombrable.

124.4 \rightarrow **Axiome du choix**

S'il existe une surjection de E_1 sur E_2 , alors il existe une bijection d'une partie E_0 de E_1 sur E_2 .

124.5 \rightarrow S'il existe une surjection de \mathbb{N} sur E , alors l'ensemble E est au plus dénombrable.

124.6 Les parties infinies de \mathbb{N} (famille des entiers pairs; famille des entiers impairs; famille des entiers premiers...) sont des ensembles dénombrables.

124.7 \rightarrow Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Opérations sur les ensembles dénombrables

125. **Produit d'ensembles dénombrables**

On sait que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis est encore un ensemble fini.

125.1 Le produit cartésien d'un ensemble fini non vide et d'un ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable.

125.2 Quels que soient les entiers $0 \leq p \leq n$, on pose

$$\varphi\left(\frac{n(n+1)}{2} + p\right) = (p, n-p).$$

L'application φ ainsi définie est une bijection de \mathbb{N} sur \mathbb{N}^2 .

125.3 \rightarrow Pour tout entier $d \geq 2$, l'ensemble \mathbb{N}^d est dénombrable.

125.4 On suppose que les ensembles E_1, \dots, E_d sont dénombrables et, pour tout $1 \leq k \leq d$, on note φ_k , une bijection de \mathbb{N} sur E_k . Alors l'application φ définie par

$$\forall (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \quad \varphi(n_1, \dots, n_d) = (\varphi_1(n_1), \dots, \varphi_d(n_d))$$

est une bijection de \mathbb{N}^d sur le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_d$.

125.5 \rightarrow Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

125.6 \rightarrow Un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

126. Unions d'ensembles dénombrables

Soit $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une famille d'ensembles dénombrables. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note φ_k , une bijection de \mathbb{N} sur E_k .

126.1 Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq r < d$, on pose

$$\varphi(qd + r) = \varphi_r(q).$$

Alors l'application φ est une surjection de \mathbb{N} sur l'union finie $E_1 \cup \dots \cup E_d$.

126.2 Quel que soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$\varphi(n, k) = \varphi_k(n).$$

Alors l'application φ est une surjection de \mathbb{N}^2 sur l'union dénombrable

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

126.3 \rightarrow L'union d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.

127. Soit $f : E \rightarrow F$, une application.

L'image de f , notée $f_*(E)$, est définie par

$$f_*(E) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

127.1 \rightarrow Soit E , un ensemble au plus dénombrable. Pour toute application $f : E \rightarrow F$, l'ensemble $f_*(E)$ est au plus dénombrable.

127.2 Si les ensembles E_1 et E_2 sont des parties au plus dénombrables de \mathbb{C} , alors les ensembles

$$E_1 + E_2 = \{x + y, (x, y) \in E_1 \times E_2\}$$

et

$$E_1 \cdot E_2 = \{xy, (x, y) \in E_1 \times E_2\}$$

sont des parties au plus dénombrables de \mathbb{C} .

Exemples classiques

128. \rightarrow Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{N}^2 , \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 sont dénombrables.

129. \rightarrow L'ensemble

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

des nombres rationnels est dénombrable.

130. Support d'une famille sommable

On cherche une condition suffisante pour définir la somme d'une famille complexe comptant une infinité de termes. La notion de *série convergente* permet de définir la somme d'une famille complexe comptant une infinité de termes dans le cas (très) particulier où la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indexée par \mathbb{N} .

130.1 Soit $(u_k)_{k \in I}$, une famille de nombres complexes indexée par un ensemble quelconque I . (On ne suppose pas que l'ensemble I est ordonné.)

On note $\mathfrak{P}_0(I)$, l'ensemble des parties finies de I et, pour toute partie finie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$, on note

$$s(J) = \sum_{k \in J} |u_k| \in \mathbb{R}_+.$$

130.2 \Leftrightarrow Une famille $(u_k)_{k \in I}$ de nombres complexes est dite **sommable** lorsque l'ensemble

$$\{s(J), J \in \mathfrak{P}_0(I)\}$$

est une partie bornée de \mathbb{R} .

130.3 Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$I_\varepsilon = \{k \in I : |u_k| \geq \varepsilon\}$$

est fini.

130.4 \rightarrow Si $(u_k)_{k \in I}$ est une famille sommable, alors son **support**

$$I_0 = \{k \in I : u_k \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

131. L'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers et l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels sont dénombrables.

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X] \quad \mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

132. Un nombre complexe z est un *entier algébrique* lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul tel que $P(z) = 0$. L'ensemble des entiers algébriques est une partie dénombrable de \mathbb{C} .

133. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une application surjective de \mathbb{N}^n sur l'ensemble des parties à n éléments de \mathbb{N} . L'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.

134. L'ensemble X^* des mots (finis) écrits sur un alphabet fini X est dénombrable.

Contre-exemples classiques

135. Tout réel positif x admet un, et un seul, *développement décimal propre* : il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'entiers compris entre 0 et 9 telle que

$$\exists N_0 \in \mathbb{Z}_-, \forall n \leq N_0, \quad d_n = 0$$

et que

$$\forall N \in \mathbb{Z}, \exists n \geq N, \quad d_n \neq 9.$$

On peut déduire la *partie entière* et la *partie fractionnaire* de x par la relation :

$$x = \underbrace{\sum_{n=N_0}^0 d_n 10^{-n}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}}_{\in [0,1[}$$

135.1 Procédé d'extraction diagonale

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite réelle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(d_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$, le développement décimal propre de x_k .

On pose $d_n = 0$ pour tout entier $n \leq 0$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

— si $d_{n,n} \neq 0$, on pose $d_n = d_{n,n} - 1 \in \{0, 1, \dots, 8\}$;

— si $d_{n,n} = 0$, on pose $d_n = 1$.

La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un développement décimal propre et le réel

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

est différent de tous les termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

135.2 \rightarrow L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels n'est pas dénombrable.

135.3 Un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

135.4 \rightarrow L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes n'est pas dénombrable.

136. Produit infini d'ensembles

136.1 L'application

$$\left[(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-(n+1)} \right]$$

(dite *représentation binaire*) est une surjection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur l'ensemble non dénombrable $[0, 1]$.

136.2 Le produit cartésien d'une famille infinie d'ensembles de cardinal supérieur à 2 n'est pas dénombrable.

137. Parties d'un ensemble**137.1 Indicatrice d'ensemble**

L'application $[A \mapsto \mathbb{1}_A]$ est une surjection de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sur l'ensemble non dénombrable $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

137.2 Si l'ensemble E est infini, alors l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E n'est pas dénombrable.

Entraînement

138. Questions pour réfléchir

1. S'il existe une surjection de E sur un ensemble non dénombrable F , alors E n'est pas dénombrable.
2. Le produit d'un nombre fini d'ensembles finis est fini. Quel est son cardinal?
3. L'union d'une famille finie $(E_k)_{1 \leq k \leq d}$ d'ensembles finis est un ensemble fini et

$$\max_{1 \leq k \leq d} \#(E_k) \leq \#(E_1 \cup \dots \cup E_d) \leq \sum_{k=1}^d \#(E_k).$$

Étudier les cas d'égalité dans cet encadrement.

4. L'union d'une famille dénombrable d'ensembles finis peut-elle être un ensemble fini?
5. On suppose que $E = F \cup G$, où F est dénombrable et E n'est pas dénombrable. Alors G n'est pas dénombrable.

V

Familles sommables

139. Par définition [130.2], une famille complexe $(u_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille de réels positifs $(|u_k|)_{k \in I}$ est sommable.

Plus généralement, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une famille de vecteurs $(u_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille de réels positifs $(\|u_k\|)_{k \in I}$ est sommable.

140. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on peut définir la somme de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sens des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N u_k$$

(seulement si la série $\sum u_n$ est convergente) ou au sens des familles sommables :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

(seulement si la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable).

141. → Comparaison avec les séries absolument convergentes

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

142. → Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable : si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable, alors pour tout sous-index $I_0 \subset I$, la famille $(u_k)_{k \in I_0}$ est sommable.

143. → Théorème de comparaison

Si $(v_k)_{k \in I}$ est une famille sommable et si

$$\forall k \in I, \quad |u_k| \leq |v_k|,$$

alors la famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable.

V.1 Propriétés de la somme

144. → Permutation des termes

Si $(u_k)_{k \in I}$ est une famille sommable, alors la famille $(u_{\sigma(k)})_{k \in I}$ est sommable et

$$\sum_{k \in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k \in I} u_k,$$

quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

145. Soit $\sum u_n$, une série absolument convergente.

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}.$$

146. → Si la série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente, alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

147. → Inégalité triangulaire

Si $(u_k)_{k \in I}$ est une famille sommable, alors

$$\left| \sum_{k \in I} u_k \right| \leq \sum_{k \in I} |u_k|.$$

Positivité de la somme

148. → Soit $(u_k)_{k \in I}$, une famille de réels positifs, sommable ou non. Pour toute partie $I_0 \subset I$,

$$0 \leq \sum_{k \in I_0} u_k \leq \sum_{k \in I} u_k.$$

149. → Soient $(u_k)_{k \in I}$ et $(v_k)_{k \in I}$, deux familles sommables de réels. Si $u_k \leq v_k$ pour tout $k \in I$, alors

$$\sum_{k \in I} u_k \leq \sum_{k \in I} v_k.$$

Additivité de la somme

150. → Soit $(u_k)_{k \in I}$, une famille sommable. On suppose que l'ensemble des indices est l'union de deux parties disjointes : $I = I_1 \sqcup I_2$. Alors

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I_1} u_k + \sum_{k \in I_2} u_k.$$

151. → Linéarité de la somme

Soient $(u_k)_{k \in I}$ et $(v_k)_{k \in I}$, deux familles sommables. Pour tout scalaire λ , la famille $(\lambda u_k + v_k)_{k \in I}$ est sommable et

$$\sum_{k \in I} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k \in I} u_k + \sum_{k \in I} v_k.$$

V.2 Sommation par paquets

152. → Une partition de I est une famille $(I_j)_{j \in J}$ de parties deux à deux disjointes de I dont l'union est égale à I :

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j.$$

153. Méthode usuelle

En général, on définit une partition de l'index I au moyen d'une application

$$f : I \rightarrow E.$$

En effet, pour tout $i \in I$, il existe un, et un seul, $x \in E$ tel que $f(i) = x$, si bien qu'en posant

$$\forall x \in E, \quad I_x = \{i \in I : f(i) = x\},$$

on définit une partition $(I_x)_{x \in E}$ de I .

Théorème de Fubini

154. La première partie du théorème [155] sert à démontrer qu'une famille $(u_k)_{k \in I}$ est sommable en prenant $a_k = |u_k|$. La seconde partie du théorème [156] permet de calculer la somme d'une famille sommable comme la somme d'une série (absolument) convergente.

155. → Condition nécessaire et suffisante de sommabilité

Soit $(a_k)_{k \in I}$, une famille de réels positifs et $(I_j)_{j \in J}$, une partition de I .

155.1 S'il existe une sous-famille $(a_k)_{k \in I_{j_0}}$ qui n'est pas sommable, alors [142] la famille $(a_k)_{k \in I}$ n'est pas sommable.

155.2 Si chaque sous-famille $(a_k)_{k \in I_j}$ est sommable, alors on peut définir les sommes partielles

$$\forall j \in J, \quad \sigma_j = \sum_{k \in I_j} a_k.$$

Dans ce cas, la famille $(a_k)_{k \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille des sommes partielles $(\sigma_j)_{j \in J}$ est sommable et, en cas de sommabilité,

$$\sum_{k \in I} a_k = \sum_{j \in J} \sum_{k \in I_j} a_k.$$

156. → Calcul de la somme d'une famille sommable

Soient $(u_k)_{k \in I}$, une famille complexe sommable et $(I_j)_{j \in J}$, une partition de I .

Pour tout $j \in J$, la famille $(u_k)_{k \in I_j}$ est sommable et

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in I_j} u_k \right).$$

Application aux séries doubles

157. Une *série double* est une famille réelle ou complexe indexée par $I = \mathbb{N}^2$.

Dans ce cas, $J = \mathbb{N}$ et on considère en général la partition de I définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{(m, n), m \in \mathbb{N}\}$$

ou par

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \{(m, n), n \in \mathbb{N}\}.$$

158. Soit $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$, une famille de réels positifs.

158.1 Convention

Si $\sum u_k$ est une série divergente de terme général positif, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et on peut alors noter

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_k = +\infty.$$

158.2 On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

ainsi que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \tau_m = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

158.3 Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La famille positive $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m a_{m,n}$ est convergente et la série $\sum \sigma_n$ est convergente.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{m,n}$ est convergente et la série $\sum \tau_m$ est convergente.

159. Si la famille complexe $(x_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m x_{m,n}$ converge absolument ;
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n x_{m,n}$ converge absolument ;

3. Les séries de termes généraux

$$s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} \quad \text{et} \quad t_m = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$$

convergent absolument et leurs sommes sont égales :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} t_m.$$

Exemples

160. La famille $(\frac{1}{k^\alpha} \mathbb{1}_{(k>n)})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

161. Soient a et b , deux réels strictement positifs. La famille des réels

$$u_{p,q} = e^{-ap-bq}$$

où (p, q) parcourt \mathbb{N}^2 est sommable. Quelle est sa somme ?

162. Condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\left(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha} \right)_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$$

soit sommable.

163. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\left(\frac{z^p}{q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \quad \left(\frac{z^{pq}}{p!q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$$

V.3 Produit de Cauchy

164. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries complexes. On pose

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad x_{k,\ell} = u_k v_\ell.$$

164.1 Outre les partitions de $I = \mathbb{N}^2$ vues au [157], on considère la partition définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{(k, n-k), 0 \leq k \leq n\} = [k + \ell = n].$$

164.2 → Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la famille $(x_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

164.3 Le **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{(k,\ell) \in I_n} x_{k,\ell}.$$

164.4 → Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

164.5 Le produit de Cauchy est une opération commutative et associative sur les familles sommables.

165. Séries de Poisson

Quel que soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, le produit de Cauchy de la série $\sum \lambda^n / n!$ par la série $\sum \mu^n / n!$ est la série $\sum (\lambda + \mu)^n / n!$. → [191]

166. Séries géométriques

166.1 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raisons $q_1 \neq q_2$ admet

$$\frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}$$

pour terme général.

166.2 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raison q admet $(n + 1)q^n$ pour terme général.

167. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum u_n$ est convergente, mais le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ est une série divergente. Commenter.

Entraînement

168. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une famille sommable. Alors la famille

$$(x_k x_\ell)_{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable et

$$\sum_{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2} |x_k x_\ell| = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \right)^2.$$

En particulier [3.80],

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \right)^2.$$

(Cette inégalité peut être démontrée facilement avec la théorie des séries.)

169. Soient $a > 1$ et $b > 1$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{p,q} = \frac{1}{a^p + b^q} \quad \text{et} \quad v_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{a^p b^q}}.$$

La famille $(v_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable [164.2] et, par comparaison, la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

170. Suite de [166] –

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} &= \frac{9}{4} & \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n &= \frac{q}{(1-q)^2} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n &= \frac{2}{(1-q)^3} & \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n &= \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

et en particulier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16.$$

171. Quel que soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la famille complexe

$$\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable. Pour $a = b$, sa somme égale à $(a + 1)e^a$ et, pour $a \neq b$, à

$$\frac{be^b - ae^a}{b - a}.$$

172. La famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$a_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

est sommable et sa somme est égale à 8.

173. La famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$p_{i,j} = \frac{1}{2^{i+1}j!}$$

est sommable et [33] sa somme est égale à e .

174.1 La famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$u_{i,j} = \frac{i+j}{i!j!}$$

est sommable et [33] sa somme est égale à $2e^2$.

174.2 La famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$p_{i,j} = \left(\frac{1}{2} \right)^{i+j} u_{i,j}$$

est sommable et sa somme est égale à e .

175. Suite de [49.4] – Comparer les sommes

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$$

et commenter.

176. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}.$$

Comparer les sommes

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \right)$$

et commenter le résultat.

177. Fonction ζ et constante d'Euler [37]

1. Nature des séries

$$\sum (\zeta(n) - 1), \quad \sum \frac{\zeta(n) - 1}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}.$$

2.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$$

en admettant que

$$\forall -1 \leq x < 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \ell n(1-x).$$

178.

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{\pi^2}{6}$$

179. Si $|a| < 1$, la famille $(a^{n(2q+1)})_{(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$

180. Soit $\sum p_k$, une série convergente de terme général positif. En posant

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{n,k} = p_k \mathbb{1}_{(1 \leq n \leq k)},$$

les sommes

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k \quad \text{et} \quad S_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

sont bien définies pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, la série $\sum R_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum kp_k$ converge et, dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k.$$

181. La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_{m,n} = \frac{1}{m^2n + mn^2 + 2mn}$$

est sommable.

182. On considère la famille réelle $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$u_{p,q} = 2^{-3q-p-(p+q)^2}$$

et la partition $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \{(p, q) \in I : p + q = n\}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q) \in I_n} u_{p,q} = \frac{4}{3} [2^{-n(n+1)} - 2^{-(n+1)(n+2)}].$$

2. La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à $4/3$.

183. Pour $k, n \geq 1$, on pose

$$x_{k,n} = \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \mathbb{1}_{[1 \leq n \leq k]}.$$

183.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = \frac{(-1)^k}{k}$$

donc la famille $(x_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

183.2 Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2.

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

3.

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=1}^N u_n = Nu_{N+1} + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

4. On a donc [49.2]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = -\ln 2$$

bien que la famille $(x_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ ne soit pas sommable.

184. On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

184.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \{(k, p) \in A : kp = n\}.$$

Si $(u_{k,p})_{(k,p) \in A}$ est une famille sommable, alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{k,p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p}.$$

184.2 Soit $x \in]-1, 1[$.

1. La famille $(x^{kp})_{(k,p) \in A}$ est sommable.

2.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

où d_n est le nombre des entiers naturels qui divisent n .

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

185. Séries de Bertrand

La série

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

186. Nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$.

187. Règle de Raabe-Duhamel

Soit $\sum u_n$, une série dont le terme général est strictement positif. Si le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Dans le cas particulier des séries de Riemann [36],

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nous allons en déduire une technique qui permet parfois de déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en considérant la suite de terme général

$$v_n = \ln(n^\beta u_n)$$

pour une valeur de β bien choisie.

187.1 On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Avec $\beta = \alpha$, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente et il existe un réel $A > 0$ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}.$$

187.2 On suppose seulement que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Dans ces conditions,

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La nature de la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ s'en déduit si, et seulement si, $\alpha \neq \beta$.

2. Si $\alpha > 1$, alors il existe $1 < \beta < \alpha$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et donc que la série $\sum u_n$ converge absolument.

3. Si $\alpha < 1$, alors il existe $\alpha < \beta \leq 1$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc que la série (de terme général positif) $\sum u_n$ diverge.

187.3 Cette méthode ne permet pas de déterminer la nature des séries de Bertrand [185].

188. Théorème de Morgan

On considère une série de terme général $u_n = 1/\varphi(n)$ et on étudie le quotient

$$r_n = \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)}.$$

188.1 Que dire de r_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans le cas des séries de Riemann? dans le cas des séries de Bertrand [185]?

188.2 * Soit φ , une fonction croissante et strictement positive de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$. On suppose que le quotient r_n tend vers une limite ℓ , finie ou infinie, lorsque n tend vers $+\infty$.

Alors, par comparaison avec les séries de Riemann,

— pour $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ converge;

— pour $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

188.3 On pose $\varphi(t) = t \ln^2 t$: la règle de Morgan peut-elle s'appliquer? Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

188.4 Utiliser la règle de Morgan pour démontrer la convergence de la série

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

189. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $u_n = 1/n$ si n est un carré parfait et que $u_n = 1/n^2$ dans le cas contraire. Nature de la série $\sum u_n$?

190. Espérance d'une variable aléatoire discrète

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante et de limite nulle, telle que $a_0 > 0$.

1. On pose $u_0 = 0$ et $u_n = n(a_{n-1} - a_n)$ pour tout $n \geq 1$.

1.a Que dire du signe de u_n ?

1.b

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n - Na_N.$$

1.c

$$\forall N < P, \quad 0 \leq N(a_N - a_P) \leq \sum_{n=N+1}^P u_n.$$

2. La série $\sum a_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, leurs sommes sont égales.

3. Soit X , une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Elle admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente.

Dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

191. Deux irrationnels

On pose

$$x_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. On suppose qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Si $n!u_n \in \mathbb{Z}$ et si $0 < n!|x - u_n| < 1$ pour tout n assez grand, alors x est irrationnel.

2. Le réel y_0 est irrationnel car

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n!}\right).$$

3. Le réel x_0 est irrationnel car

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}.$$

4. Comparer x_0 aux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$$

et en déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2x_0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 0.$$

192. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} - \ell n.$$

1. Par concavité de ℓn ,

$$\forall n \geq 2, \quad u_n - u_{n-1} \leq \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} < 0.$$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n - u_{n-1} = \mathcal{O}(1/n^2)$ et la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel α .

3. La série $\sum (-1)^n (u_n - \alpha)$ est semi-convergente.

4. Comme $|u_n - \alpha| \leq 1/2$ à partir d'un certain rang, la série $\sum (u_n - \alpha)^n$ est absolument convergente.

5. Comme $u_n \leq 1/2$ pour tout $n \geq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{u_n}}$ diverge.

193. Produits infinis

À une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres réels non nuls, on associe la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_n.$$

193.1 Le produit infini $\prod u_n$ est dit **convergent** lorsque la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers un réel non nul, qui est alors noté

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Le produit infini $\prod u_n$ **diverge** lorsque la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ diverge ou tend vers 0.

193.2 Exemples [44]

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \quad \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$$

193.3 Si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tend vers 1.

193.4 On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \ell n u_n$ converge.

2. Le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

3. On suppose que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors le produit infini $\prod (1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

4. Une suite de terme général strictement positif $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, le produit infini $\prod (v_{n+1}/v_n)$ est convergent.