Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2022/2023

Composition de Mathématiques

Le 14 septembre 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère la fonction f *définie sur l'intervalle* $I = [0, \pi/4]$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

ainsi que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \int_0^{\pi/4} \big[f(x)\big]^n \,dx.$$

Partie A. Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Tracer sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que

$$\forall\, x \in J, \quad \cos\big(f^{-1}(x)\big) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que

$$\forall\, x \in J \setminus \{1\}, \qquad \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. En déduire le développement limité à l'ordre 1 de f^{-1} en $x = \sqrt{2}$.

Partie B. Étude des dérivées successives de f

6. Justifier que f est de classe C^∞ sur I.

On note $f^{(n)}$, *la dérivée* n*-ième de* f *sur* I.

7. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall\, x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

8. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.Pn$$

9. Déterminer les polynômes P_1, P_2 et P_3.

10. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Partie C. Étude de la suite (u_n)

11. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer u_2.

12. Déterminer les réels a et b, tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \qquad \frac{1}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}.$$

13. En posant $t = \sin x$, déterminer u_1.

14. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

15. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n \geqslant \int_{\pi/4 - 1/n^2}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x}\,dx \geqslant \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\cos^n\big(\pi/4 - 1/n^2\big)}.$$

En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

16. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} u_n.$$

❖ II – Problème ❖

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, *une matrice. On rappelle que, pour tout polynôme*

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m,$$

la matrice $P(A)$ *est définie par*

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

où I *désigne la matrice unité de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que, si P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *et si* A *est une matrice de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, *alors*

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

On se propose de calculer explicitement le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée des premiers termes

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1$$

et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour ce faire, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.
2. On considère le polynôme

$$P = (X-1)^2(X-2) \in \mathbb{R}[X].$$

2. a. Justifier l'existence et l'unicité d'un couple

$$(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$$

tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad X^n = PQ_n + R_n.$$

2. b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$R_n = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.$$

2. c. Établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 1, \quad b_n = n \quad \text{et} \quad c_n = 2^n - n - 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Utiliser la question précédente pour écrire la matrice A^n comme une combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A - I)^2$.
3. b. Expliciter la troisième ligne de la matrice A^n.
4. a. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. b. En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❖ III – Problème ❖

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une seule solution.

Cette solution sera notée u_n.

2. a. Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
2. b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis établir que la suite (u_n) est croissante.
2. c. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
2. d. Démontrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
3. a. Justifier que $v_n > 0$, puis démontrer que

$$\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \cdot v_n.$$

3. b. Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{-\ln v_n}{n v_n}}{-\ln v_n} = 0$$

et en déduire que

$$\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n.$$

3. c. Démontrer enfin que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

4. Donner la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum v_n^2$.

❖ IV – Problème ❖

Soit n, un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose de lancer n fois une pièce.
❦ *Si le nombre de Pile obtenus est pair, alors le joueur est déclaré vainqueur et gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu ;*
❦ *Si le nombre de Pile obtenu est impair, alors le joueur est déclaré perdant et doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.*
En particulier, si le joueur n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur mais ne remporte rien.

La pièce est truquée au sens où, à chaque lancer, la probabilité p d'obtenir Pile n'est pas nécessairement égale à $1/2$ (mais, bien entendu, $0 < p < 1$).
On notera X, le nombre aléatoire de Pile obtenus lors des n lancers et G, le gain aléatoire du joueur.
On admet *qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que X et G soient des variables aléatoires :*

$$X : \Omega \to \mathbb{N} \qquad\qquad G : \Omega \to \mathbb{Z}.$$

*On dira que le jeu est **favorable au joueur** si le gain moyen du joueur est positif, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{E}(G) \geqslant 0$.*

1. Démontrer qu'il existe un événement $A \in \mathcal{A}$ qui corresponde au fait que le joueur soit déclaré vainqueur.
☞ *On exprimera A à l'aide des événements $[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.*

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = 2/3$.

2. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3, 2/3)$. Expliquer pourquoi cette hypothèse est raisonnable. Vérifier que, sous cette hypothèse,

$$P(A) = \frac{13}{27}.$$

3. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ puis déduire la loi de G de la loi de X.
4. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie B.

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $0 < p < 1$.
Le forain qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! »On cherche les conditions nécessaires sur p et n pour que cette réclame ne soit pas mensongère.
On suppose cette fois que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et on considère la fonction $Y : \Omega \to \{-1, 1\}$ définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)}.$$

5. a. Démontrer que la fonction Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
5. b. Démontrer que

$$Z = \frac{Y+1}{2}$$

est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.
5. c. Démontrer que $\mathbf{E}(Y) = 2\,\mathbf{P}(A) - 1$.

6. Démontrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que $\mathbf{E}(Y) = (1-2p)^n$.
7. Exprimer $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n et p.
8. Démontrer que : si $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$, alors $p \leqslant 1/2$ ou n est pair.

Partie C.

Le concepteur du jeu souhaite que son jeu soit attractif (c'est-à-dire $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$) et que son activité soit rentable (c'est-à-dire $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$: le jeu est défavorable au joueur).

9. a. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que

$$\mathbf{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\, \mathbf{P}(X = k).$$

9. b. Démontrer que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

9. c. Démontrer que

$$\mathbf{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}.$$

9. d. En déduire que : si $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$ et $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$, alors $p \leqslant 1/2$.
10. a. Étudier la fonction f définie sur $[0, 1/2]$ par

$$\forall\, x \in [0, 1/2], \qquad f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

10. b. Pour une valeur de n fixée, quelle valeur faut-il donner à $0 \leqslant p \leqslant 1/2$ pour maximiser la rentabilité de l'activité ?

Solution I ❀ Exercice d'analyse

Partie A. Étude de la bijection réciproque de f

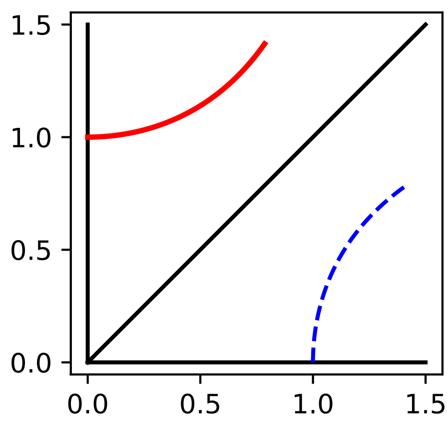
1. La fonction cos est continue, strictement positive et strictement décroissante sur l'intervalle I. Par conséquent, f est continue et strictement croissante sur I. D'après le Théorème de la bijection (version continue), f réalise donc une bijection du segment

$$I = [0, \pi/4]$$

sur le segment

$$J = \big[f(0), f(\pi/4)\big] = [1, \sqrt{2}].$$

2. Les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la diagonale $y = x$.



f en trait continu épais, f^{-1} en tirets

Il est important de tracer la tangente horizontale en $x = 0$ pour f et la tangente verticale en $x = 1 = f(0)$ pour f^{-1}.

Pour info

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = 1.5
x = np.linspace(0, np.pi/4)
y = 1/np.cos(x)

# taille de la figure en pouces
plt.figure(figsize=(2.5, 2.5))
# repère orthonormé
plt.axis('equal')
# les trois axes (trait noir)
plt.plot([0, r], [0, 0], 'k') # abscisses
plt.plot([0, 0], [0, r], 'k') # ordonnées
plt.plot([0, r], [0, r], 'k') # diagonale
# graphe de f (trait épais rouge)
plt.plot(x, y, 'r', linewidth=2)
# graphe de f^(-1) (tirets bleus)
plt.plot(y, x, 'b--')

plt.savefig("graphe_de_f.pdf")
```

3. Pour tout $x \in J$, le réel $f^{-1}(x)$ appartient à I, donc $\cos f^{-1}(x)$ est compris entre $1/\sqrt{2}$ et 1. En particulier, $\cos f^{-1}(x) > 0$ et

$$\frac{1}{\cos f^{-1}(x)} = f\big(f^{-1}(x)\big) = x,$$

donc

$$\forall\, x \in J, \qquad \cos f^{-1}(x) = \frac{1}{x}.$$

❧ Comme $f^{-1}(x)$ est compris entre $1/\sqrt{2}$ et 1, ce réel est compris entre 0 et π, donc son sinus est positif. Par conséquent,

$$\sin f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \cos^2 f^{-1}(x)} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

pour tout $x \in J$.

4. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0, \pi/4]$ et

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = \frac{-(-\sin t)}{\cos^2 t}.$$

D'après le Théorème de la bijection (version dérivable), la réciproque de f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle semi-ouvert

$$]f(0), f(\pi/4)] = \big]1, \sqrt{2}\big] = J \setminus \{1\}.$$

De plus, pour tout $x \in J \setminus \{1\}$, on sait que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{\cos^2 f^{-1}(x)}{\sin f^{-1}(x)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

d'après la question précédente.

5. Comme f^{-1} est dérivable en $x_0 = \sqrt{2}$, son développement limité à l'ordre 1 est donné par la formule de Taylor-Young :

$$f^{-1}(x_0 + h) = f^{-1}(x_0) + h(f^{-1})'(x_0) + o(h).$$

Comme $x_0 = f(\pi/4)$, on a $\pi/4 = f^{-1}(x_0)$ et, d'après la question précédente,

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$f^{-1}(x) \underset{x \to \sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + o(x - \sqrt{2}).$$

Partie B. Étude des dérivées successives de f

6. La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur I. Par conséquent, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

7. On a déjà calculé la dérivée de f au **[4.]** :

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

donc $P_1 = X$ est un choix possible.

HR : on suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et un polynôme P_n tels que

$$\forall\, x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Dans ces conditions, pour tout $x \in I$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(\sin x)\cos x}{\cos^{n+1} x} - \frac{P_n(\sin x)\cdot(n+1)(-\sin x)}{\cos^{n+2} x} = \frac{P_n'(\sin x)\cos^2 x + (n+1)\sin x \cdot P_n(\sin x)}{\cos^{n+2} x}.$$

On peut simplifier le numérateur grâce à la relation

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

En posant

$$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n,$$

on obtient alors un polynôme tel que

$$\forall x \in I, \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{(n+1)+1}(x)}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existait un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

8. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in I, \qquad \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)} = \frac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

On en déduit que

$$\forall u \in [0, \sqrt{2}/2], \qquad P_n(u) = Q_n(u)$$

et donc que le polynôme $P_n - Q_n$ admet une infinité de racines. Par conséquent, $P_n = Q_n$.

On peut donc formuler plus précisément le résultat de la question précédente : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un, **et un seul,** polynôme P_n tel que

$$\forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

L'unicité de la famille $(P_n)_{n\geqslant 1}$ prouve que la relation de récurrence qu'on a trouvée à la question précédente n'est pas seulement *une relation possible*, mais en fait une **relation réelle** entre les seuls polynômes P_n possibles. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)X.Pn$$

9. Ayant justifié l'unicité des polynômes P_n, on peut affirmer que $P_1 = X$ (possibilité vue en **[7.]**).

On déduit alors de la relation de récurrence que

$$P_2 = (1-X^2).1 + 2X.X = 1 + X^2,$$
$$P_3 = (1-X^2).(2X) + 3X.(X^2+1) = 5X + X^3.$$

10. Les premiers polynômes calculés suggèrent l'hypothèse de récurrence suivante, déjà validée pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

HR : on suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que P_n soit un polynôme unitaire de degré n.

On a donc

$$P_n = X^n + Q_{n-1}$$

avec $\deg Q_{n-1} \leqslant n-1$. D'après la relation de récurrence du **[8.]**,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-X^2)\cdot(nX^{n-1} + Q_{n-1}') \\ &\qquad + (n+1)X.(X^n + Q_{n-1}) \\ &= -nX^{n+1} + (n+1)X^{n+1} + [\cdots] \\ &= X^{n+1} + \underbrace{[\cdots]}_{\deg\leqslant n}. \end{aligned}$$

(Évidemment, il faut prendre soin d'expliquer soigneusement sur sa copie pourquoi le degré de chaque terme contenu dans le crochet est inférieur à n. Il n'y a aucune difficulté à cela.)

Ainsi, P_{n+1} est un polynôme unitaire de degré $(n+1)$.

L'hypothèse de récurrence est donc validée pour tout $n \geqslant 1$: chaque polynôme P_n est un polynôme unitaire de degré n.

Partie C. Étude de la suite (u_n)

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est continue sur le segment I, donc l'intégrale I_n est bien définie.

❧ Pour $n = 2$,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \big[\tan x\big]_0^{\pi/4} = 1.$$

12. Pour $t \neq \pm 1$,

$$\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{(a+b)+(a-b)t}{1-t^2}.$$

Avec $a = b = 1/2$, on a le résultat souhaité.

13. Avec $t = \sin x$, on a $dt = \cos x\, dx$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\, dx}{1-\sin^2 x} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ell n \frac{1+t}{1-t}\Big]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ell n \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ell n(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

(On obtient le résultat final à l'aide de la quantité conjuguée de $(\sqrt{2}-1)$, qui est égale à $(\sqrt{2}+1)$.)

14. Pour tout $x \in I$,

$$1 \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant \Big(\frac{1}{\cos x}\Big)^n \leqslant \Big(\frac{1}{\cos x}\Big)^{n+1}.$$

L'intégration conserve les inégalités, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\pi}{4} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.

15. La fonction f^n est positive et si $n \geqslant 2$,

$$[\pi/4 - 1/n^2, \pi/4] \subset [0, \pi/4],$$

donc

$$I_n \geqslant \int_{\pi/4-1/n^2}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x}\,dx.$$

La fonction f^n est croissante (car f est croissante et positive **[1.]**), donc

$$\int_{\pi/4-1/n^2}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n x}\,dx \geqslant \int_{\pi/4-1/n^2}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(\pi/4 - 1/n^2)}\,dx$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\cos^n(\pi/4 - 1/n^2)}.$$

❧ La fonction cos est décroissante et positive sur I, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\cos^n(\pi/4 - 1/n^2)} \geqslant \frac{1}{\cos^n(\pi/4 - 1)}.$$

Posons $r = \cos(\pi/4 - 1) \in]0, 1[$. D'après la minoration précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant \frac{1}{n^2 r^n}.$$

Par croissances comparées, $n^2 r^n$ tend vers 0 (car $r < 1$), donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

16. On intègre par parties pour trouver la relation de récurrence. Comme plus haut **[11.]**, on doit reconnaître la dérivée de la fonction tan. On obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x.\cos^2 x} \\ &= \Big[\frac{\tan x}{\cos^n x}\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x \cdot \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}\,dx \\ &= \big(\sqrt{2}\big)^n - n\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2} x}\,dx \end{aligned}$$

si bien que

$$u_{n+2} = \big(\sqrt{2}\big)^n - n(u_{n+2} - u_n)$$

c'est-à-dire

$$(n+1)u_{n+2} = \big(\sqrt{2}\big)^n + nu_n.$$

Solution II ❀ Suite récurrente linéaire d'ordre trois

1. Comme

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

on en déduit que

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

Remarque.— On notera que l'un des facteurs est de rang 2 et l'autre de rang 1 et que le résultat demandé signifie que

$$\operatorname{Im}(A - 2I) \subset \operatorname{Ker}(A - I)^2.$$

Comme $\operatorname{rg}(A - I)^2 = 1$, il doit être clair que

$$\operatorname{Ker}(A - I)^2 = [x - 2y + z = 0]$$

et on vérifie facilement que les colonnes de la matrice $(A-2I)$ sont des solutions de cette équation, ce qui signifie que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

2. a. Comme $P \neq 0$, le Théorème de la division euclidienne nous assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tels que

$$X^n = PQ_n + R_n$$

avec

$$\deg R_n < \deg P = 3$$

et donc $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. b. La famille

$$\big(1, (X - 1), (X - 1)^2\big)$$

est une famille de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, échelonnée en degré. Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et chaque polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, en particulier chaque reste R_n, se décompose de manière unique dans cette base.

2. c. En substituant 1 et 2 (= les racines de P) à X dans la relation

$$X^n = (X-1)^2(X-2)Q_n(X) + c_n(X-1)^2 + b_n(X-1) + a_n,$$

on obtient

$$2^n = c_n + b_n + a_n \quad \text{et} \quad 1 = a_n.$$

Après dérivation de la relation, il reste

$$nX^{n-1} = (X - 1)[\cdots] + 2c_n(X - 1) + b_n$$

et en substituant 1 à X, on obtient l'information manquante :

$$n = b_n.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 1, \quad b_n = n \quad \text{et} \quad c_n = 2^n - n - 1.$$

Remarque.— Il faut bien comprendre la situation posée : ici, 1 est racine double de P, c'est-à-dire racine de P **et de** P′. C'est pour cette raison qu'il faut **dériver** la division euclidienne pour obtenir la troisième équation nécessaire pour calculer les trois inconnues.

3. a. On sait **[1.]** que P est un polynôme annulateur de A. On déduit donc de la division euclidienne de X^n par P que

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= P(A).Q_n(A) + R_n(A) \\ &= R_n(A) \\ &= c_n(A - I)^2 + b_n(A - I) + a_n I \end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (2^n - n - 1)(A - I)^2 + n(A - I) + I.$$

3. b. La troisième ligne de A^n est égale à $E_3^\top.A^n$, c'est-à-dire

$$c_n E_3^\top.(A - I)^2 + b_n E_3^\top.(A - I) + a_n E_3^\top.I.$$

D'après **[3.a.]** et les calculs menés en **[1.]**, la troisième ligne de A^n est égale à

$$(2^n - n - 1)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{pmatrix}(2^n - n - 1) & (-2^{n+1} + 3n + 2) & (2^n - 2n)\end{pmatrix}.$$

4. a. La relation est évidemment vraie au rang $n = 0$, puisque $A^0 = I$ et que

$$X_0 = \begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Si elle est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix}u_{n+3}\\u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n\\u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix} = A.X_n = A.A^n.X_0 = A^{n+1}.X_0.$$

Nous avons ainsi démontré par récurrence que la relation était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. b. Par définition des colonnes X_n,

$$u_n = E_3^\top.X_n = E_3^\top.A^n.X_0$$

et on déduit de **[3.b.]** que

$$u_n = (2^n - n - 1) + (-2^{n+1} + 3n + 2) = -2^n + 2n + 1.$$

REMARQUE.— Il convient de vérifier le résultat obtenu pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ avant de l'encadrer...

Pour aller plus loin dans la vérification, on peut se servir de Python.

Vérification

```
def expr(n):
  return -2**n+2*n+1

def u(n):
  # U = u(k), u(k+1), u(k+2)
  U = 0,1,1 # k = 0
  exact = True
  for k in range(3):
    exact = exact and expr(k)==U[k]
  for k in range(2, n):
  # on passe de u(k-2), u(k-1), u(k)
  # à u(k-1), u(k), u(k+1)
    U = U[1], U[2], 2*U[0]-5*U[1]+4*U[2]
    exact = exact and expr(k)==U[1]
  return exact and expr(n)==U[2]
```

Attention, Python calcule sur des "entiers longs", sans arrondi.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, le terme général compte rapidement de très nombreuses décimales et le calcul de u_n par récurrence devient vite assez long. Il est difficile d'atteindre le 100.000-ième terme dans un délai raisonnable, mais la formule est assez rapidement vérifiée pour les 25.000 premiers termes au moins.

Solution III ❀ Suite définie implicitement

1. La fonction f_n est continue (polynomiale !) de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable et

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} \leqslant -1 < 0$$

donc f_n est strictement décroissante sur I. D'après le Théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$J = \left]\lim_{x\to+\infty} f_n(x), f_n(0)\right] =]-\infty, 1].$$

Comme $0 \in J$, ce réel admet un, et un seul, antécédent par f_n. Autrement dit, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une, et une seule, solution u_n dans l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$.

2. a. D'après l'étude précédente, la fonction f_n réalise une bijection de l'intervalle $]0, 1[$ sur l'intervalle

$$]f(1), f(0)[=]-1, 1[.$$

Comme $0 \in]-1, 1[$ et que u_n est l'unique antécédent de 0 par f_n dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $u_n \in]0, 1[$.

2. b. Par définition,

$$f_n(u_n) = 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

Comme $0 < u_n < 1$, alors

$$0 < u_n^{n+1} < u_n^n < 1$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} > 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

On a donc démontré que

$$f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

et comme f_{n+1} est strictement décroissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ est donc (strictement) croissante.

2. c. La suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ est croissante **[2.b.]** et bornée **[2.a.]**, donc elle converge. Plus précisément, d'après **[2.a.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on en déduit que la limite de la suite appartient au segment $[0, 1]$.

2. d. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell \neq 1$, alors $\ell < 1$ d'après **[2.c.]** et par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \ell < 1$$

puisque la suite est croissante. Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant u_n^n \leqslant \ell^n$$

et comme $0 \leqslant \ell < 1$, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$$

et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = 1 - \ell - 0 > 0.$$

C'est absurde, puisque par définition de la suite,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(u_n) = 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc vers 1.

3. a. Par **[2.d.]**, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 et par **[2.b.]**, elle est *strictement* croissante, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n < 1$$

c'est-à-dire $v_n > 0$.

❧ Ainsi, $\ell n\, v_n$ est bien défini !
Par définition de u_n,

$$v_n = 1 - u_n = u_n^n$$

donc

$$\ell n\, v_n = n\,\ell n\, u_n = n\,\ell n\big(1 - (1-u_n)\big) = n\,\ell n(1 - v_n).$$

Comme la suite u converge vers 1, la suite v tend vers 0 et on déduit de l'équivalent bien connu de $\ell n(1-x)$ au voisinage de $x = 0$ que

$$\ell n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n.$$

Remarque.— Pour les angoissés chroniques qui imaginent qu'il est impossible de composer des équivalents sans provoquer un nouveau tremblement de terre à Lisbonne, je précise que

$$\ell n(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

signifie que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ell n(1-x)}{-x} = 1.$$

On en déduit, par **composition de limites**, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell n(1-x_n)}{-x_n} = 1$$

c'est-à-dire

$$\ell n(1-x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x_n$$

pour *toute* suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de limite nulle.*

3. b. On a vu en passant à la question précédente que

$$\frac{-\ell n\, v_n}{nv_n} = \frac{-n\,\ell n(1-v_n)}{nv_n} = \frac{-\ell n(1-v_n)}{v_n}.$$

Comme v_n tend vers 0 (question précédente !), on déduit du développement limité à l'ordre 2 de $\ell n(1-h)$ au voisinage de $h = 0$ que

$$\frac{-\ell n\, v_n}{nv_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{v_n}{2} + o(v_n).$$

Par conséquent (même méthode qu'à la question précédente),

$$\ell n\Big(\frac{-\ell n\, v_n}{nv_n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{2}$$

et donc enfin

$$\frac{1}{-\ell n\, v_n}\cdot \ell n\Big(\frac{-\ell n\, v_n}{nv_n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-v_n}{2\,\ell n\, v_n}.$$

Or v_n tend vers 0 et $\ell n\, v_n$ tend vers $-\infty$, donc le quotient tend vers 0.

En développant cette expression de limite nulle, on obtient

$$\frac{\ell n(-\ell n\, v_n)}{-\ell n\, v_n} + 1 + \frac{\ell n\, n}{\ell n\, v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or $-\ell n\, v_n$ tend vers $+\infty$, donc le premier terme tend vers 0 (forme $\frac{\ell n\, X}{X}$ avec X tendant vers $+\infty$), ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ell n\, n}{\ell n\, v_n} = -1$$

c'est-à-dire

$$\ell n\, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ell n\, n.$$

3. c. Avec **[3.a.]** et **[3.b.]**, on a démontré que

$$-n\cdot v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ell n\, n$$

c'est-à-dire

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell n\, n}{n}.$$

4. On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \ell n\, n = +\infty \quad \text{et que} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}} = 0,$$

donc il existe un rang à partir duquel

$$0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant v_n = \ell n\, n \cdot \frac{1}{n}$$

et un rang à partir duquel

$$0 \leqslant v_n^2 = \frac{\ell n^2\, n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

D'après le Théorème de comparaison des séries de terme général positif, la série $\sum v_n$ diverge (car la série harmonique diverge) et la série $\sum v_n^2$ converge (puisque la série de Riemann $\sum {}^{1}/_{n^{3/2}}$ converge).

Solution IV ❀ Un tour à la Foire Saint-Romain

1. La variable aléatoire X compte le nombre de Pile obtenus lors des n lancers. Par conséquent, elle prend des valeurs comprises entre 0 et n (inclus) et le joueur est déclaré vainqueur si, et seulement si, la valeur de X est un entier pair.

Par conséquent,

$$A = \bigsqcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 0\leqslant 2k\leqslant n}} [X = 2k].$$

Comme X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, chaque ensemble $[X = 2k]$ appartient à $\mathcal{A}$ (définition des variables aléatoires !) et comme une union finie d'événements est encore un événement, on peut conclure que $A \in \mathcal{A}$.

Partie A.

2. Si on modélise les lancers par une famille de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors on sait que le nombre de succès obtenus au cours de n lancers (= la somme des variables aléatoires de Bernoulli) suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Rien dans l'énoncé ne s'oppose à ce que l'expérience étudiée soit modélisée de cette manière, donc il est raisonnable de supposer que X suit ici la loi binomiale $\mathscr{B}(3, 2/3)$ et plus généralement (dans le reste du problème) que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

❧ La décomposition du **[1.]** devient ici

$$A = [X = 0] \sqcup [X = 2].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 2)\\ &= \binom{3}{0}p^0q^3 + \binom{3}{2}p^2q^1 = q^3 + 3p^2q\\ &= \frac{1}{27} + \frac{3\times 4}{27} = \frac{13}{27}.\end{aligned}$$

Remarque.— Il est bon de remarquer que cette probabilité est (un petit peu) inférieure à $1/2$: le joueur perd plus souvent qu'il ne gagne !

3. Donner la loi de G, c'est donner l'ensemble $G(\Omega)$ des valeurs prises par G ainsi que la probabilité $\mathbf{P}(G = x)$ pour tout $x \in G(\Omega)$.

L'énoncé permet de déduire le gain G du nombre X de Pile obtenus et donc la loi de G.

Nombre X de Pile	0	1	2	3
Gain G	0	-10	20	-30
Probabilité	$1/27$	$6/27$	$12/27$	$8/27$

4. Par définition,

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{x\in G(\Omega)} x\cdot\mathbf{P}(G = x)$$

et donc

$$\mathbf{E}(G) = -10\cdot\frac{6}{27} + 20\cdot\frac{12}{27} - 30\cdot\frac{8}{27} = \frac{-60}{27}.$$

Le gain moyen est négatif (environ -2€), donc le jeu est défavorable au joueur.

Partie B.

5. a. Par définition, la fonction Y est la composée de X, variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, par la fonction $[n \mapsto (-1)^n]$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Donc Y est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (à valeurs dans $\{\pm 1\}$ en fait).

5. b. De même, Z est une fonction affine de la variable aléatoire Y, donc Z est une variable aléatoire. Comme Y prend les valeurs ± 1, la variable Z prend les valeurs

$$\frac{(-1)+1}{2} = 0 \quad\text{et}\quad \frac{1+1}{2} = 1.$$

Donc Z suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(A)$$

puisque $[Z = 1] = [Y = 1]$ (par définition de Z) et que Y prend la valeur 1 si, et seulement si, X est paire — autrement dit, $[Y = 1] = A$.

5. c. Comme Y ne prend que les valeurs ± 1,

$$\mathbf{P}(Y = -1) = 1 - \mathbf{P}(Y = 1) = 1 - \mathbf{P}(A)$$

et, par définition de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= 1\cdot\mathbf{P}(Y = 1) + (-1)\cdot\mathbf{P}(Y = -1)\\ &= \mathbf{P}(A) - \big(1 - \mathbf{P}(A)\big) = 2\,\mathbf{P}(A) - 1.\end{aligned}$$

6. Comme Y est une fonction de X, on peut aussi calculer $\mathbf{E}(Y)$ en appliquant la formule de transfert. Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathbf{P}(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

D'après la Formule du binôme,

$$\mathbf{E}(Y) = \big((-p) + (1-p)\big)^n = (1-2p)^n.$$

7. D'après **[5.c.]** et **[6.]**,

$$2\,\mathbf{P}(A) - 1 = (1-2p)^n$$

donc

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

8. On en déduit que $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$ si, et seulement si,

$$(1-2p)^n \geqslant 0$$

c'est-à-dire :

❧ ou bien n est pair (sans restriction sur la valeur de p)

❧ ou bien n est impair et $1 - 2p \geqslant 0$, soit $p \leqslant 1/2$.

Remarque.— L'énoncé ne demandait qu'une implication, il est facile de se rendre compte qu'il s'agit ici d'une équivalence logique.

Remarque.— Dans la partie A, l'entier n était impair et $p > 1/2$ et en effet, l'espérance de G était négative **[4.]**.

Partie C.

9. a. Le gain absolu $|G|$ est toujours égal à $10X$ et le signe du gain est celui de $Y = (-1)^X$ (positif si X est pair, négatif si X est impair). Par conséquent,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad G(\omega) = 10X(\omega).Y(\omega)$$

ou encore $G = 10.(-1)^X.X$.

D'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}(G) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\,\mathbf{P}(X=k).$$

9. b. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$k\binom{n}{k} = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k\cdot n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

9. c. Dans l'expression du **[9.a.]**, le terme en $k=0$ est nul, il reste donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(G) &= 10\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}\,p^k q^{n-k}\\ &= 10\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n\binom{n-1}{k-1}\,p^k q^{n-k} && \textbf{[9.b.]}\\ &= -10np\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}\,(-p)^\ell q^{(n-1)-\ell} && (\ell = k-1)\\ &= -10np(-p+q)^{n-1} = -10np(1-2p)^{n-1}\end{aligned}$$

grâce à la formule du binôme.

9. d. D'après **[8.]**, si $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$, alors l'entier n est pair ou $p \leqslant 1/2$.

Mais si n est pair et $p > 1/2$, alors $(n-1)$ est impair et $(1-2p) < 0$, donc $(1-2p)^{n-1} < 0$. D'après **[9.c.]**, l'espérance de G est alors strictement positive.

Par contraposée, si $\mathbf{P}(A) \geqslant 1/2$ et $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$, alors n est impair et donc $p \leqslant 1/2$.

10. a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1/2]$ (polynomiale) et

$$\begin{aligned}f'(x) &= (1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x(1-2x)^{n-2}\\ &= (1-2x)^{n-2}(1-2nx).\end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, le signe de $f'(x)$ est donc aussi le signe de $(1-2nx)$, donc la fonction f est croissante sur $[0, 1/2n]$ et décroissante sur $[1/2n, 1/2]$. La fonction f est donc maximale pour $x = 1/2n$.

10. b. D'après la question précédente, le gain du forain, égal à $-G$, est maximal pour $p = 1/2n$. Dans ce cas, la probabilité pour qu'un joueur gagne une partie **[7.]** est égale à

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1+e}{2e} \approx 0,68$$

et le gain moyen du joueur **[9.c.]** est égal à

$$\mathbf{E}(G) = -5\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-5}{e} \approx -1,84€.$$

REMARQUE.— La valeur "optimale" de p est assez proche de 0. Dans ce cas, on devine que, la plupart du temps, un joueur va gagner en n'obtenant aucun Pile et va perdre 10€ en obtenant une seule fois Pile. Ce n'est plus un jeu, c'est un trompe-couillon... On peut suggérer au forain de remplacer une pièce aussi grossièrement truquée par une activité demandant de l'adresse pour éviter de froisser la susceptibilité des joueurs.