Composition de Mathématiques

Le 6 novembre 2019 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Étant données $(n+1)$ abscisses deux à deux distinctes :

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$$

on appelle **polynôme interpolateur de** f **aux points** x_i tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec la fonction f aux points x_i, c'est-à-dire tel que

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad P(x_i) = f(x_i).$$

Partie A. Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant n$, on définit le polynôme

$$\ell_i \in \mathbb{R}_n[X]$$

de la façon suivante :

$$\ell_i = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

et on pose ensuite

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i.$$

Il est manifeste que $L_n(f)$ est un polynôme. La fonction polynomiale associée à ce polynôme est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad L_n(f)(t) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(t).$$

1. Démontrer que $L_n(f)$ est bien un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Partie B. Calcul effectif

Plus généralement, quels que soient les nombres y_0, …, y_n, le polynôme

$$L_y = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad P(x_i) = y_i.$$

2. On suppose ici que

$$(x_0, x_1, x_2) = (-1, 0, 1) \quad \text{et} \quad (y_0, y_1, y_2) = (4, 0, 4).$$

Démontrer que le polynôme interpolateur est $4X^2$.

3. Écrire une fonction `lagrange(x, y, a)` en langage Python dont les arguments sont :

- la liste $x = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des abscisses ;
- la liste $y = (y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des ordonnées ;
- une abscisse $a \in \mathbb{R}$.

Cette fonction doit renvoyer la valeur du polynôme interpolateur au point a.

Si, par exemple, $x = (-1, 0, 1)$ et $y = (4, 0, 4)$, alors l'instruction `lagrange(x, y, 3)` doit renvoyer 36.

4. Chercher le polynôme interpolateur de f aux points x_i sous la forme

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

revient à résoudre le système linéaire

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad P(x_i) = f(x_i)$$

qui peut s'écrire matriciellement sous la forme suivante :

$$V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

4. a. Quelle est la taille de la matrice V ? Quels sont ses coefficients ?

4. b. On résout ce système par l'algorithme du pivot de Gauss. Indiquer la complexité de ce calcul en fonction de n. Comparer avec la complexité de l'algorithme que vous avez proposé à la question précédente.

Partie C. Erreur d'interpolation

Dans cette partie, on suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,b]$. On note

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

l'ensemble des abscisses d'interpolation et on considère le polynôme

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

On veut démontrer, pour tout $x \in [a, b]$, la propriété $\mathscr{P}_x$ suivante :

$$\exists\, a < c_x < b, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot \pi_\sigma(x).$$

5. Démontrer que la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie pour tout $x \in \sigma$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : si

$$\varphi \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$$

est une fonction p fois dérivable qui s'annule $(p+1)$ fois sur $[a, b]$, alors il existe $a < c_p < b$ tel que

$$\varphi^{(p)}(c_p) = 0.$$

7. On considère maintenant une abscisse $x \notin \sigma$. On définit la fonction F par

$$\forall\, t \in [a, b], \quad F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\, \pi_\sigma(t)$$

où λ est une constante réelle.

7. a. Expliquer pourquoi on peut choisir λ de telle sorte que

$$F(x) = 0.$$

7. b. Démontrer que, dans ce cas, la fonction F s'annule $(n+2)$ fois sur $[a, b]$. En déduire que la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

8. Démontrer que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$. En déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\, \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

9. On considère ici $[a, b] = [-1, 1]$ et

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

9. a. Démontrer, par exemple à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

9. b. Que dire de $\|f - L_n(f)\|_\infty$ lorsque n devient grand ?

❖ II – Problème ❖

Partie A. Intégrales généralisées

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, différent de 1 et de -1. Démontrer que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0.$$

2. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes. (On ne demande pas de calculer leurs valeurs.)

2. a.

$$\int_0^\pi \ln(\sin\theta)\, d\theta$$

2. b.

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

2. c.

$$\int_0^\pi \ln(1 + \cos\theta)\, d\theta$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée

$$P(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction $P\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction paire.

5. Démontrer que la différence

$$2\pi \ln x - P(x)$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

☞ *On pourra vérifier que*

$$\forall\, u \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right], \quad \bigl|\ln(1+u)\bigr| \leqslant \frac{3}{2}|u|$$

à l'aide d'une formule de Taylor.

Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie B. Racines de l'unité

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, différent de 1, on pose

$$P_2(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta.$$

6. a. Démontrer que

$$P_2(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\Bigl(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Bigr).$$

6. b. Démontrer que

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^{n} \Bigl(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Bigr)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. c. En déduire que

$$P_2(x) = \left| \begin{array}{ll} 4\pi\ln x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1. \end{array} \right.$$

7. Donner une expression simplifiée de $P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \neq 1$.

8. a. Démontrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Bigl(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Bigr) = \Bigl(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Bigr)^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8. b. En déduire que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

8. c. **Pour 5/2 uniquement.** En déduire enfin que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\, d\theta = \frac{-\pi\ln 2}{2}.$$

9. La fonction P est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Tracer l'allure de son graphe, en mettant en évidence ses principales caractéristiques.

❖ III – Problème ❖

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(-x^2/2)$$

et trois nombres réels positifs :

$$0 \leqslant a < b \qquad \text{et} \qquad \lambda > 0.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \,:\, n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}$$

et

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_{k,n} = \frac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}.$$

1. Démontrer que, pour tout entier n assez grand, l'ensemble I_n est une partie non vide de $\mathbb{N}$.
2. Caractériser les entiers $k \in I_n$ au moyen d'un encadrement du réel $x_{k,n}$.
3. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
Dans la suite de ce problème, on notera M, une constante de Lipschitz de f.
4. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, h > 0, \qquad \left| hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{Mh^2}{2}.$$

4. b. On suppose que I_n n'est pas vide. En notant

$$p = \min(I_n) \quad \text{et} \quad q = \max(I_n),$$

majorer la quantité

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q,n}} f(t)\,dt \right|.$$

4. c. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

5. Soit $\varepsilon > 0$, un réel fixé.
Soit n, un entier assez grand pour que I_n ne soit pas vide. Pour tout entier $k \in I_n$, on pose

$$u_{k,n} = \frac{x_{k,n}\sqrt{n\lambda}}{k}$$

et

$$y_{k,n} = (1 - u_{k,n})^k \exp(k\, u_{k,n}).$$

Démontrer l'existence d'un entier N_ε tel que, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, les encadrements suivants soient vérifiés.
5. a.

$$\forall\, k \in I_n, \quad \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{y_{k,n}}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{y_{k,n}}{\sqrt{n\lambda}}$$

☞ *On pourra utiliser la formule de Stirling.*

5. b.

$$\forall\, k \in I_n, \quad (1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leqslant y_{k,n} \leqslant (1+\varepsilon)f(x_{k,n})$$

6. Démontrer que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\, e^{-n\lambda}$$

existe et exprimer cette limite sous la forme d'une intégrale.

Solution I ❀ Interpolation de Lagrange

Partie A. Existence du polynôme interpolateur

1. Il est clair les ℓ_i sont tous des polynômes de degré n et que $\ell_i(t) = 1$ pour $t = x_i$ et $\ell_i(t) = 0$ pour $t = x_j$ avec $j \neq i$. Par conséquent, $L_n(f)$ est un polynôme de degré *inférieur à* n et que

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad L_n(f)(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,j} = f(x_j).$$

Donc $L_n(f)$ est bien un polynôme interpolateur de f aux points x_i.

❧ Si P est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, alors

$$\deg[P - L_n(f)] \leqslant \max\{\deg P, \deg L_n(f)\} \leqslant n$$

et d'autre part,

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad P(x_j) = L_n(f)(x_j).$$

Comme les x_j sont deux à deux distincts, le polynôme $P - L_n(f)$ admet au moins $(n+1)$ racines distinctes, alors que son degré est inférieur à n : c'est donc le polynôme nul et $P = L_n(f)$. L'unicité du polynôme interpolateur est ainsi démontrée.

Partie B. Calcul effectif

2. Il est clair que $4x_i^2 = y_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ et que $\deg(4X^2) = 2$. Comme il existe un, et un seul, polynôme interpolateur, le polynôme $4X^2$ est bien cet unique polynôme interpolateur.

3. On définit une fonction auxiliaire `interp(i, x, a)` qui évalue au point a le polynôme ℓ_i.

```
def interp(i, x, a):
  n, li = len(x), 1
  for k in range(n):
    if (k!=i):
      li *= (a-x[k])/(x[i]-x[k])
  return li
```

Le code de la fonction `lagrange(x, y, a)` s'en déduit alors sans peine.

```
def lagrange(x, y, a):
  n, s = len(x), 0.
  for i in range(n):
    s += y[i]*interp(i, x, a)
  return s
```

Remarque.— Comme disait (à peu près) mon vénéré collègue René D., un bon code ne fait qu'*une seule chose à la fois*.

4. a. La matrice V appartient à $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ (elle envoie un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Sur la colonne i, on traduit l'équation

$$f(x_i) = P(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j.$$

Quels que soient $0 \leqslant i, j \leqslant n$, le coefficient de la matrice situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est donc

$$x_i^j.$$

Remarque.— Comme disent (à peu près) Alan Moore et David Lloyd, V *for Vandermonde*.

4. b. Comme il s'agit d'un système de $(n+1)$ équations en $(n+1)$ inconnues, la complexité de la résolution par l'algorithme du pivot est en $\mathcal{O}(n^3)$.

Remarque.— Soyons sérieux : $\mathcal{O}\big((n+1)^3\big)$ et $\mathcal{O}(n^3)$, c'est pareil !

❧ Dans tous les calculs à effectuer (pour chacun des deux algorithmes), l'opération élémentaire la plus coûteuse est la multiplication. Nous ne compterons donc que les multiplications.

Pour bien comparer avec l'algorithme proposé plus haut, il faut préciser ce qu'on cherche à calculer : on notera e, le nombre d'évaluations du polynôme interpolateur à effectuer.

Lagrange Chacune de ces évaluations effectue $\mathcal{O}(n)$ multiplications et $\mathcal{O}(n)$ appels à la fonction auxiliaire `interp`. Chaque appel à `interp` effectue $\mathcal{O}(n)$ multiplications. Par conséquent, chaque évaluation du polynôme interpolateur effectue $\mathcal{O}(n^2)$ multiplications. Le coût global *en temps* des évaluations est donc en $\mathcal{O}(e \cdot n^2)$. La complexité *spatiale* est négligeable (on n'enregistre aucune donnée).

Gauss L'algorithme du pivot s'exécute, on l'a dit, en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications. Un fois que cet algorithme est appliqué, on connaît les coefficients du polynôme interpolateur (complexité *spatiale* en $\mathcal{O}(n)$) et les évaluations de ce polynômes ont un coût unitaire en $\mathcal{O}(n)$ (algorithme de Horner ou assimilé). Le coût global *en temps* est donc en

$$\mathcal{O}(n^3 + en).$$

L'algorithme de Lagrange l'emporte donc facilement pour $e = o(n)$; les deux algorithmes se valent pour $e = \Theta(n)$; l'algorithme du pivot l'emporte pour $n = o(e)$.

❧ On pourrait chercher à améliorer le calcul du polynôme interpolateur (on a proposé le code le plus simple qui soit). Il est également possible d'inverser une matrice de Vandermonde avec une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$... Mais ça n'a rien d'immédiat.

❧ Par ailleurs, on compare ici deux algorithmes numériques sans se soucier de la stabilité des calculs : est-on bien sûr qu'on obtient des résultats aussi précis avec chacun des deux algorithmes ?

Partie C. Erreur d'interpolation

5. Si $x \in \sigma$, alors $f(x) = L_n(f)(x)$ par construction du polynôme interpolateur $L_n(f)$. Par ailleurs, par définition du polynôme π_σ, on a aussi $\pi_\sigma(x) = 0$. La propriété $\mathscr{P}_x$ est donc vérifiée

$$0 - 0 = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \cdot 0$$

en prenant c_x n'importe où dans l'intervalle $]a, b[$.

6. Considérons les points où la fonction φ s'annule :

$$a \leqslant x_0^0 < x_1^0 < \cdots < x_p^0 \leqslant b.$$

Supposons que, pour un entier $0 \leqslant i < p$, il existe $(p-i+1)$ abscisses
$$a \leqslant x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{p-i}^i \leqslant b$$
où la fonction $\varphi^{(i)}$ s'annule. Comme $i < p$, la fonction $\varphi^{(i)}$ est dérivable sur chaque segment $[x_k^i, x_{k+1}^i]$ (donc continue sur le segment et dérivable sur l'intervalle ouvert) et en appliquant le Théorème de Rolle sur chacun de ces intervalles, il existe $(p-i)$ réels x_k^{i+1} tels que
$$\begin{aligned} a \leqslant x_0^i < x_0^{i+1} < x_1^i < \cdots \\ < x_k^i < x_k^{i+1} < x_{k+1}^i < \cdots \\ < x_{p-i-1}^i < x_{p-i-2}^{i+1} < x_{p-i}^i \leqslant b \end{aligned}$$
et que
$$\forall\, 0 \leqslant k < p, \quad \varphi^{(i+1)}(x_k^{i+1}) = 0.$$
On a ainsi démontré par récurrence (finie !) que, pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant p$, il existe $(p-i+1)$ abscisses
$$a \leqslant x_0^i < x_1^i < \cdots < x_{p-i}^i \leqslant b$$
où la fonction $\varphi^{(i)}$ s'annule. En particulier, pour $i = p$, il existe une abscisse $c_p = x_0^p$ telle que $a < c_p < b$ et $\varphi^{(p)}(c_p) = 0$.

REMARQUE.— Raisonnement classique. La principale difficulté réside dans l'hypothèse de récurrence : on fait une hypothèse pour $0 \leqslant i < p$ et la conclusion vaut pour $0 \leqslant i \leqslant p$. (La propriété n'est pas héréditaire pour $i = p$!)

7. a. Comme $x \notin \sigma$, alors $\pi_\sigma(x) \neq 0$ et l'équation
$$F(x) = 0$$
d'inconnue λ admet alors pour unique solution
$$\lambda = \frac{F(x) - f(x) + L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}.$$
REMARQUE.— Pour $x \in \sigma$, le dénominateur serait nul !

7. b. Comme on l'a vu au **5.**, la fonction F s'annule en chaque point de σ (indépendamment du choix de λ). D'autre part, on a choisi λ au **7.a.** de telle sorte que F s'annule aussi au point $x \notin \sigma$.

La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ (combinaison linéaire de f, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et de fonctions polynomiales) sur $[a, b]$ et s'annule en $(n+2)$ points distincts. On peut appliquer le résultat du **6.** avec $p = n+1$. Il existe donc un réel $a < c_x < b$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$.

Comme $L_n(f)$ est une fonction polynomiale dont le degré est inférieur à n par construction, sa dérivée $(n+1)$-ième est identiquement nulle. Comme π_σ est une fonction polynomiale de degré $(n+1)$, sa dérivée $(n+1)$-ième est constante, égale à $(n+1)!$. Par conséquent,
$$\forall\, t \in [a, b], \quad F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda \cdot (n+1)!$$
et en particulier pour $t = c_x$:
$$0 = f^{(n+1)}(c_x) - \lambda \cdot (n+1)!$$
ce qui nous donne
$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$
et la propriété $\mathscr{P}_x$ est bien démontrée.

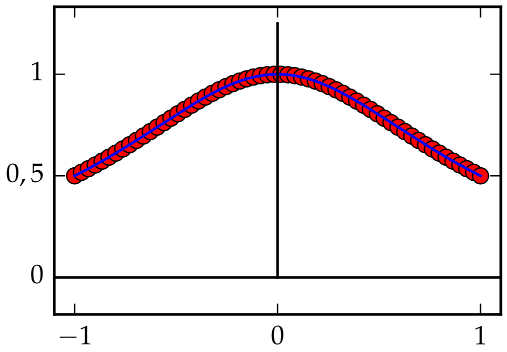
Bref : la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie pour chaque $x \in [a, b]$, qu'il appartienne à σ ou non.

8. Comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, sa dérivée $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$ et donc bornée sur ce segment.

La borne supérieure $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ est donc bien définie dans $\mathbb{R}$.

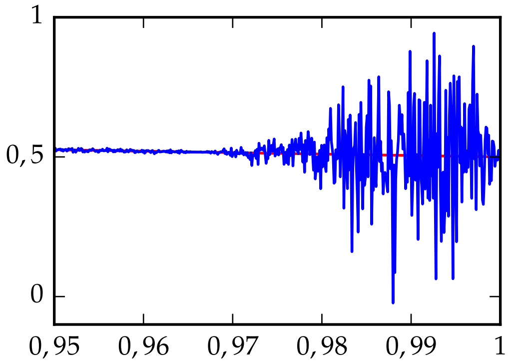
❧ Comme la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie pour tout $x \in [a, b]$, on a donc
$$\forall\, x \in [a, b], \quad \big|f(x) - L_n(f)(x)\big| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot \big|\pi_\sigma(x)\big|.$$
Il reste à trouver un réel positif K indépendant de n et de x tel que
$$\forall\, x \in [a, b], \quad \big|\pi_\sigma(x)\big| \leqslant K^{n+1}.$$
Comme x et les x_i appartiennent tous au segment $[a, b]$, la distance $|x - x_i|$ est inférieure à la longueur totale $(b-a)$ du segment et donc
$$\forall\, x \in [a, b], \quad \big|\pi_\sigma(x)\big| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant (b-a)^{n+1}.$$
Avec $K = b - a$, on a donc
$$\forall\, x \in [a, b], \quad \big|f(x) - L_n(f)(x)\big| \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$
Comme le majorant trouvé est indépendant de $x \in [a, b]$, on peut passer au sup et en déduire que
$$\big\|f - L_n(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$
9. a. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On sait que
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$
et, d'après la Formule de Taylor-Young, que
$$f(x) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^{2n}).$$
Par unicité du développement limité à l'ordre n, on en déduit que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = (-1)^k.$$
Comme la borne supérieure est un majorant, on en déduit que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant \big|f^{(2k)}(0)\big| = (2k)!.$$
9. b. Dans ce cas particulier, $a = -1$, $b = 1$ et, pour $n = 2k-1$, le majorant de $\|f - L_n(f)\|_\infty$ trouvé au **8.** est supérieur à
$$\frac{2^{2k}(2k)!}{(2k)!} = 4^k.$$
Comme ce majorant tend vers $+\infty$, il est probable que $\|f - L_n(f)\|_\infty$ ne tende pas vers 0...

REMARQUE.— Rien de plus logique : un polynôme interpolateur de f est construit pour interpoler la fonction f aux points de σ, pas pour fournir une approximation de f en dehors des points de σ !



La fonction f et 60 points d'interpolation

Lorsque les points d'interpolation sont mal choisis, on peut mettre en évidence le phénomène de Runge : le polynôme $L_n(f)$ est une mauvaise approximation de la fonction f, même lorsque l'entier n est grand.



Phénomène de Runge

Solution II ❀ Intégrale de Poisson

Partie A. Intégrales généralisées

1. On reconnaît un trinôme du second degré en fonction de x. Le coefficient de x^2 étant positif, ce trinôme atteint son minimum en $x = {}^{-b}/_{2a} = \cos\theta$ et ce minimum est égal à

$$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \geqslant 0.$$

Comme $x \neq \pm 1$, on en déduit que $\sin\theta \neq 0$ et donc que le minimum du trinôme est *strictement* positif. Par conséquent, pour $x \neq \pm 1$,

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x\cos\theta + 1 > 0.$$

REMARQUE.— On peut aussi mettre le trinôme sous forme canonique :

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$$

ce qui montre qu'il est toujours positif et qu'il est nul si, et seulement si, $x = \cos\theta$ et $\sin\theta = 0$. Le trinôme ne peut donc s'annuler que pour $x = \pm 1$ et $\sin\theta = 0$.

2. a. La fonction sin est continue et strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, donc la fonction $f_1 = [\theta \mapsto \ell n(\sin\theta)]$ est continue sur cet intervalle.

❧ Lorsque θ tend vers 0, on sait que

$$\sin\theta = \theta + o(\theta^2) = \theta \cdot [1 + o(\theta)].$$

Par suite,

$$\ell n(\sin\theta) = \ell n\,\theta + \ell n[1 + o(\theta)] \sim \ell n\,\theta.$$

Comme la fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0 (fonction de référence), on en déduit que f_1 est intégrable au voisinage de 0.

❧ Le changement de variable affine $\theta = \pi - \alpha$ transforme $\theta \in [\pi - 1, \pi[$ en $\alpha \in]0, 1]$. D'après le Théorème du changement de variable, la fonction f_1 est intégrable sur $[\pi - 1, \pi[$ si, et seulement si,

$$\ell n[\sin(\pi - \alpha)] = \ell n \sin\alpha$$

est intégrable sur $]0, 1]$, ce qui est vrai comme on vient de le rappeler. Par conséquent, la fonction f_1 est bien intégrable au voisinage de π.

La fonction f_1 est donc intégrable sur l'intervalle ouvert $]0, \pi[$.

2. b. La fonction $f_2 = [\theta \mapsto \ell n(1 - \cos\theta)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]0, \pi]$.

Lorsque θ tend vers 0,

$$\begin{aligned}\ell n(1 - \cos\theta) &= \ell n\left(\frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)\right) \\ &= \ell n(\theta^2) + \ell n\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \sim 2\,\ell n\,\theta\end{aligned}$$

et comme la fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0 (*ter repetita placent* ?), la fonction f_2 est intégrable sur $]0, \pi]$.

2. c. La fonction $f_3 = [\theta \mapsto \ell n(1 + \cos\theta)]$ est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0, \pi[$. On sait que

$$\forall\,\theta \in [0, \pi[, \quad \ell n(1 + \cos\theta) = \ell n[1 - \cos(\pi - \theta)].$$

En posant $\alpha = \pi - \theta$, on définit un changement de variable affine qui transforme $\theta \in [0, \pi[$ en $\alpha \in]0, \pi]$. D'après le Thèorème de changement de variable, comme la fonction f_2 est intégrable sur $]0, \pi]$, la fonction f_3 est intégrable sur $[0, \pi[$.

3. Notons

$$f(\theta) = \ell n(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels cela a bien un sens.

❧ Supposons pour commencer que $x \neq \pm 1$. D'après **1.**, la fonction f est continue sur le segment $[0, \pi]$ et par conséquent, l'intégrale $P(x)$ existe.

❧ Pour $x = 1$, on remarque que

$$\forall\,\theta \in]0, \pi], \quad f(\theta) = \ell n\,2 + \ell n(1 - \cos\theta).$$

Sur l'intervalle borné $]0, \pi]$, la constante $\ell n\,2$ est intégrable et la fonction f_2 est aussi intégrable par **2.b.**, donc la fonction f est bien intégrable sur $]0, \pi[$. L'intégrale généralisée $P(x)$ est bien convergente dans ce cas.

❧ Pour $x = -1$ enfin, on remarque de même que

$$\forall\,\theta \in [0, \pi[, \quad f(\theta) = \ell n\,2 + \ell n(1 + \cos\theta)$$

et on déduit de **2.c.** que la fonction f est intégrable sur $]0, \pi[$. L'intégrale généralisée $P(x)$ est donc convergente dans ce cas aussi.

❧ La fonction P est ainsi définie sur $\mathbb{R}$.

4. Comme on vient de le remarquer, la fonction P est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(-x) &= \int_0^\pi \ln(x^2 + 2x\cos\theta + 1)\,d\theta \\ &= \int_\pi^0 \ln[x^2 + 2x\cos(\pi - \alpha) + 1](-\,d\alpha) \\ &= \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\,d\alpha = P(x) \end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $\theta = \pi - \alpha$. La fonction P est donc paire.

5. Commençons par le commencement : on ne compare bien que ce qui est comparable !

$$\begin{aligned} 2\pi\ln x - P(x) &= \int_0^\pi \ln x^2 - \ln(x^2 + 2x\cos\theta + 1)\,d\theta \\ &= -\int_0^\pi \ln\Big(1 + \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\Big)\,d\theta \end{aligned}$$

❧ Pour tout $x \geqslant 10$,

$$\left|\frac{2\cos\theta}{x} + \frac{1}{x^2}\right| \leqslant \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{3}{x} \leqslant \frac{1}{3}.$$

❧ La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $S = [-1/3, 1/3]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned} \forall\, u \in S, \quad \big|\ln(1+u)\big| &= \big|\ln(1+u) - \ln(1+0)\big| \\ &\leqslant |u| \cdot \max_{s\in S}\left|\frac{1}{1+s}\right| \\ &\leqslant |u| \cdot \frac{1}{1 + -1/3} = \frac{3}{2}\cdot|u|. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \geqslant 10$,

$$\begin{aligned} \left|\ln\Big(1 + \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\Big)\right| &\leqslant \frac{3}{2}\cdot\left|\frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right| \\ &\leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{x} = \frac{9}{2x}. \end{aligned}$$

❧ Enfin, d'après l'Inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned} \big|2\pi\ln x - P(x)\big| &\leqslant \int_0^\pi \left|\ln\Big(1 + \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\Big)\right|\,d\theta \\ &\leqslant \int_0^\pi \frac{9}{2x}\,d\theta = \frac{9\pi}{2x} \end{aligned}$$

pour tout $x \geqslant 10$.

Par encadrement, on en déduit que $2\pi\ln x - P(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Autrement dit,

$$P(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2\pi\ln x + o(1).$$

Interprétation géométrique : le graphe de P possède une branche parabolique d'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$.

Partie B. Racines de l'unité

6. a. On sait (Théorème de Riemann) que : si la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big).$$

Ici, $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, donc **[1.]** la fonction

$$\big[\theta \mapsto \ln(x^2 + 2x\cos\theta + 1)\big]$$

est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et on peut appliquer le Théorème de Riemann avec $a = 0$ et $b = 2\pi$.

6. b. Pour tout $n \geqslant 1$, on connaît les racines n-ièmes de l'unité :

$$(x^n - 1) = \prod_{k=1}^{n}(x - e^{2ik\pi/n}).$$

En conjuguant cette égalité, on obtient :

$$(x^n - 1) = \prod_{k=1}^{n}(x - e^{-2ik\pi/n})$$

et en multipliant ces deux égalités, on arrive à :

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^{n}\Big(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Big).$$

6. c. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Big) = \ln\big[(x^n - 1)^2\big]$$

pour $x \in [0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$.

❧ Pour $0 \leqslant x < 1$,

$$\ln\big[(x^n-1)^2\big] = 2\ln(1 - x^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et $P_2(x) = 0$ d'après **6.a.**

❧ Pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \ln\big[(x^n-1)^2\big] &= 2\ln(x^n - 1) \\ &= 2\ln(x^n) + 2\ln\Big(1 - \frac{1}{x^n}\Big) \\ &= 2n\ln x + 2\ln\Big(1 - \frac{1}{x^n}\Big). \end{aligned}$$

D'après **6.a.** et **6.b.**,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n}\cdot\ln\big[(x^n-1)^2\big] \\ &= 4\pi\ln x + \lim_{n\to+\infty}\frac{4\pi}{n}\ln\Big(1 - \frac{1}{x^n}\Big) \\ &= 4\pi\ln x. \end{aligned}$$

7. Pour $x \in [0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P(x) + \int_\pi^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta \qquad \text{(Chasles)} \\ &= P(x) + \int_\pi^0 \ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)(-\,d\alpha) \\ &= 2P(x) \end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $\alpha = 2\pi - \theta$.

❧ On déduit alors de la question précédente que

$$P(x) = \left| \begin{array}{ll} 2\pi \ln x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1. \end{array} \right.$$

Comme la fonction P est paire **[4.]**, on en déduit que

$$P(x) = \left| \begin{array}{ll} 2\pi \ln|x| & \text{si } |x| > 1, \\ 0 & \text{si } |x| < 1. \end{array} \right.$$

REMARQUE.— L'expression de $P(x)$ pour $x > 1$ coïncide avec l'équivalent calculé au **5.** !

8. a. Pour $k = n$,

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1 = (x-1)^2$$

donc, d'après **6.b.**,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Big(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Big) = \frac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ différent de 1. Et d'après la formule de la somme géométrique,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Big(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)^2$$

puisque $x \neq 1$.

On a donc deux polynômes P et Q tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout x dans une partie *infinie* de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $P = Q$ et en particulier $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=1}^{n-1}\Big(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)^2.$$

8. b. Appliquons le résultat précédent pour $x = 1$:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Big(2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\Big) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\Big) = n^2.$$

Comme

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

on en déduit que

$$\Big(2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\underbrace{\sin\frac{k\pi}{n}}_{\geqslant 0}\Big)^2 = n^2$$

(car $0 < {}^{k\pi}/_{n} < \pi$) et donc que

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n.$$

On sait aussi que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

et donc que

$$\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\Big)^2.$$

Changeons d'indice dans le second produit avec $j = n-k$. Comme l'indice k varie de 1 à $(n-1)$, l'indice j varie de $(n-1)$ à 1 et

$$\cos\frac{k\pi}{2n} = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n}\Big) = \sin\frac{j\pi}{2n}$$

donc

$$\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\underbrace{\sin\frac{k\pi}{2n}}_{\geqslant 0}\Big)^2 = \Big(\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\Big)^2$$

(car $0 < {}^{k\pi}/_{2n} < {}^{\pi}/_{2}$) et finalement

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

8. c. La fonction $f_1(\theta) = \ln(\sin\theta)$ n'est pas continue sur le segment $[0, {}^{\pi}/_{2}]$, donc on ne peut pas appliquer le Théorème de Riemann comme on l'a fait au **6.a.**

En revanche, la fonction f_1 est continue, croissante et négative sur $I =]0, {}^{\pi}/_{2}]$. Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction φ_n définie par

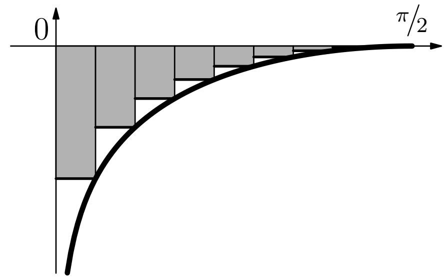
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, \frac{(k-1)\pi}{2n} \leqslant \theta < \frac{k\pi}{2n}, \quad \varphi_n(\theta) = f_1\Big(\frac{k\pi}{2n}\Big)$$

est une fonction continue par morceaux sur $[0, {}^{\pi}/_{2}]$ (fonction en escalier), telle que

$$\forall\, 0 < \theta \leqslant {}^{\pi}/_{2}, \quad f_1(\theta) \leqslant \varphi_n(\theta) \leqslant 0$$

et telle que

$$\forall\, \theta \in]0, {}^{\pi}/_{2}], \quad \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(\theta) = f_1(\theta).$$



On a donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, 0 < \theta \leqslant {}^{\pi}/_{2}, \quad \big|\varphi_n(\theta)\big| \leqslant -f_1(\theta).$$

Comme la fonction $-f_1$ est intégrable sur $]0, {}^{\pi}/_{2}]$ (d'après **2.a.**), la convergence des fonctions φ_n vers la fonction f_1 est dominée, ce qui prouve que

$$\int_0^{\pi/2} f_1(\theta)\,d\theta = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\varphi_n(\theta)\,d\theta.$$

Comme φ_n est une fonction en escalier, cela prouve que

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,d\theta = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\cdot\ln\sin\frac{k\pi}{2n}.$$

D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} \ell n \sin \frac{k\pi}{2n} = \sum_{k=1}^{n-1} \ell n \sin \frac{k\pi}{2n} = \ell n \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = -(n-1)\ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n\, n$$

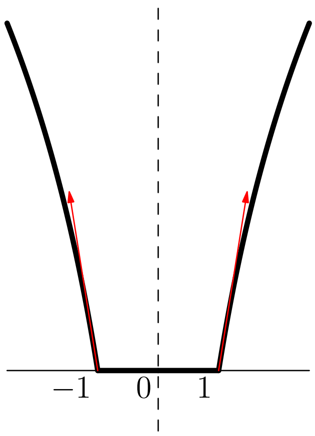
donc

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ell n \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{-(n-1)\pi}{2n}\ell n 2 + \frac{\pi}{4}\frac{\ell n\, n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{\pi \ell n 2}{2}.$$

9. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P(1) &= \int_0^{\pi} \ell n(2-2\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} \ell n(4\sin^2 \theta/2)\,d\theta \\ &= 2\pi \ell n 2 + 4\int_0^{\pi} \ell n \sin\frac{\theta}{2}\,d\frac{\theta}{2} \\ &= 2\pi \ell n 2 + 4\int_0^{\pi/2} \ell n \sin u\,du = 0 \end{aligned}$$

D'après **7.** et **8.c.**, la fonction P tend vers 0 au voisinage de 1 (aussi bien à gauche qu'à droite) et $P(1) = 0$. Par conséquent, la fonction P est continue en 1 (et en -1 par parité).



Par **4.**, le graphe de P admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Sur $[0, 1[$, la fonction P est constante. Sur $]1, +\infty[$, elle est strictement croissante et concave.

En $x = 1$, la pente de la demi-tangente à droite est égale à 2π : cette tangente est donc assez proche de la verticale (*mais elle n'est pas verticale !*).

Solution III ❁ Théorème de Laplace

1. Le segment

$$[n\lambda + a\sqrt{n\lambda}, n\lambda + b\sqrt{n\lambda}]$$

est contenu dans $\mathbb{R}_+$ (puisque a et b sont positifs) et sa longueur est égale à $(b-a)\sqrt{n\lambda}$. Cette longueur tend donc vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour n assez grand, elle est supérieure à 1 et notre segment contient au moins un entier naturel.

2. Pour tout entier k,

$$\begin{aligned} k \in I_n &\iff n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda} \\ &\iff a \leqslant x_{k,n} \leqslant b \end{aligned}$$

car $\sqrt{n\lambda} > 0$.

3. Il est clair que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -xf(x).$$

La dérivée f' est donc continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'au voisinage de $-\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et, d'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE.— *On peut être plus précis. La fonction* f *est en effet de classe* $\mathscr{C}^2$ *et*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (x^2-1)f(x).$$

Par conséquent, La dérivée f' *est décroissante sur* $[0, 1]$ *et croissante sur* $[1, +\infty[$. *Comme* $f'(0) = 0$ *et que* f' *tend vers* 0 *au voisinage de* $+\infty$, *on en déduit que*

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant 0.$$

Comme f *est paire, sa dérivée* f' *est impaire, donc*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant |f'(1)|.$$

Par accroissements finis, la fonction f *est* M*-lipschitzienne avec* $M = |f'(1)| = e^{-1/2} \approx 0,6$.

4. a. On ne compare bien que ce qui est comparable !

$$\left| hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(x) - f(t)\,dt \right| \leqslant \int_x^{x+h} |f(x)-f(t)|\,dt$$

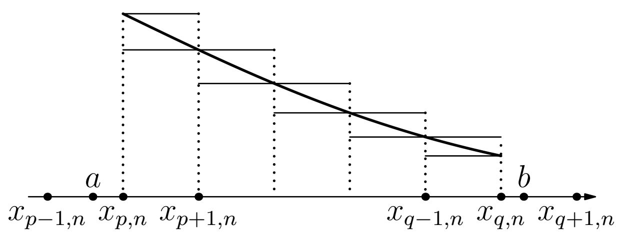
car $h > 0$ (inégalité de la moyenne). D'après la question précédente,

$$\forall\, t \in [x, x+h], \quad |f(x)-f(t)| \leqslant M \cdot |x-t| = M(t-x).$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\left| hf(x) - \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant M \int_x^{x+h} (t-x)\,dt = M \cdot \frac{h^2}{2}.$$

4. b. Il s'agit de comparer une somme et une intégrale : c'est très classique sur le principe. Ce qui est moins classique, c'est que la base des rectangles n'est pas de longueur 1. Une figure soigneusement légendée va nous guider.



❧ Comme l'ensemble I_n est une partie de $\mathbb{N}$ et qu'elle n'est pas vide (par hypothèse !), elle admet un plus grand élément et un plus petit élément.

❧ La largeur de chaque rectangle est égale à

$$\forall\, p \leqslant k \leqslant q, \quad x_{k+1,n} - x_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}.$$

Comme $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, la fonction f est continue et décroissante sur $[a, b]$ et donc, comme on le voit sur la figure,

$$\frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p+1}^{q} f(x_{k,n}) \leqslant \int_{x_{p,n}}^{x_{q,n}} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p}^{q-1} f(x_{k,n}).$$

Comme f est positive, on en déduit que

$$\frac{-1}{\sqrt{n\lambda}} f(x_{p,n}) \leqslant \int_{x_{p,n}}^{x_{q,n}} f(t)\, dt - \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p}^{q} f(x_{k,n}) \leqslant 0$$

et finalement que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p}^{q} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q,n}} f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{f(x_{p,n})}{\sqrt{n\lambda}}.$$

4. c. D'après la relation de Chasles, l'inégalité triangulaire et l'encadrement précédent,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p}^{q} f(x_{k,n}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| &\\ \leqslant \left| \int_a^{x_{p,n}} f(t)\, dt \right| + \frac{f(x_{p,n})}{\sqrt{n\lambda}} + \left| \int_{x_{q,n}}^b f(t)\, dt \right| &\\ \leqslant \int_a^{x_{p,n}} f(t)\, dt + \frac{f(x_{p,n})}{\sqrt{n\lambda}} + \int_{x_{q,n}}^b f(t)\, dt &\end{aligned}$$

la dernière majoration découlant du fait que f soit positive et que les bornes des deux intégrales soient dans l'ordre croissant. En effet, d'après **2.**, on a

$$a \leqslant x_{p,n} \leqslant x_{q,n} \leqslant b$$

puisque $p \in I_n$ et $q \in I_n$.

Par ailleurs, il est clair que $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned}\int_a^{x_{p,n}} f(t)\, dt + \frac{f(x_{p,n})}{\sqrt{n\lambda}} + \int_{x_{q,n}}^b f(t)\, dt &\\ \leqslant (x_{p,n} - a) + \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} + (b - x_{q,n}). &\end{aligned}$$

Par définition du minimum et du maximum,

$$x_{p-1,n} < a \leqslant x_{p,n} \quad \text{et} \quad x_{q,n} \leqslant b < x_{q+1,n}$$

donc

$$x_{p,n} - a \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \quad \text{et} \quad b - x_{q,n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\lambda}}$$

donc, pour tout entier n assez grand pour que I_n ne soit pas vide,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=p}^{q} f(x_{k,n}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{3}{\sqrt{n\lambda}}.$$

On déduit alors du Théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

5. Remarquons tout d'abord que

$$(1 - u_{k,n})^k = \left(1 - \frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\right)^k = \left(\frac{n\lambda}{k}\right)^k$$

et donc que

$$y_{n,k} = \left(\frac{n\lambda}{k}\right)^k e^k e^{-n\lambda}.$$

REMARQUE.— *Les deux questions qui suivent sont particulièrement difficiles à établir rigoureusement. En effet, il s'agit d'établir un encadrement pour $k \in I_n$ pour tout entier n assez grand, on ne peut donc considérer k ni comme un paramètre fixé, ni comme un paramètre qu'on pourrait faire tendre librement vers $+\infty$ (puisque k tend vers $+\infty$ en étant subordonné à n).*

Notre méthode consistera donc à chercher des encadrements indépendants de $k \in I_n$.

5. a. Il s'agit ici d'encadrer l'expression

$$y_{k,n} \cdot e^{n\lambda} \frac{k!}{(n\lambda)^k} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n\lambda}$$

qui est égale à

$$\frac{k!\sqrt{2\pi k} e^k}{k^k} \cdot \sqrt{\frac{n\lambda}{k}}.$$

❧ D'après la Formule de Stirling,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!\sqrt{2\pi k} e^k}{k^k} = 1.$$

L'énoncé a fixé $\varepsilon > 0$ et on peut supposer sans restriction que $\varepsilon < 1$. Il est alors clair que

$$\sqrt{1-\varepsilon} < 1 < 1 + \varepsilon.$$

Il existe donc un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, k \geqslant k_0, \quad \sqrt{1-\varepsilon} < \frac{k!\sqrt{2\pi k} e^k}{k^k} < 1 + \varepsilon.$$

Par définition de I_n, si $k \in I_n$, alors $k \geqslant n\lambda$ et comme $\lambda > 0$, il existe un rang $n_1' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_1',\ \forall\, k \in I_n, \quad k \geqslant k_0.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_1'$,

$$\forall\, k \in I_n, \quad 0 < \sqrt{1-\varepsilon} < \frac{k!\sqrt{2\pi k} e^k}{k^k} < 1 + \varepsilon. \tag{1}$$

❧ Pour tout $k \in I_n$,

$$1 + \frac{a}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant \frac{k}{n\lambda} \leqslant 1 + \frac{b}{\sqrt{n\lambda}}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{1 + \frac{b}{\sqrt{n\lambda}}} \leqslant \frac{n\lambda}{k} \leqslant 1.$$

Il est clair que le minorant tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $1-\varepsilon<1$, il existe donc un rang $n_2' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_2', \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{1}{1+\frac{b}{\sqrt{n\lambda}}}$$

et par conséquent, pour tout $n \geqslant n_2'$,

$$\forall\, k \in I_n, \quad 0<\sqrt{1-\varepsilon} \leqslant \sqrt{\frac{n\lambda}{k}} \leqslant 1. \qquad (2)$$

❧ Posons $n_1 = \max\{n_1', n_2'\} \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant n_1$, les encadrements (1) et (2) sont tous les deux vrais. En les multipliant membre à membre (puisque tous les termes sont positifs), on obtient : pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\forall\, k \in I_n, \quad 1-\varepsilon \leqslant y_{k,n} e^{n\lambda} \frac{k!}{(n\lambda)^k}\sqrt{2\pi}\sqrt{n\lambda} \leqslant 1+\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. b. Même technique, mais la mise en œuvre est encore plus compliquée !

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} y_{k,n} &= \exp\big[k\,\ell n(1-u_{k,n}) + k\,u_{k,n}\big] \\ &= \exp\big[k\big\{\ell n(1-u_{k,n}) + u_{k,n}\big\}\big]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \ell n \frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})} &= k\big[\ell n(1-u_{k,n}) + u_{k,n}\big] + \frac{x_{k,n}^2}{2} \\ &= k\Big[\ell n(1-u_{k,n}) + u_{k,n} + \frac{u_{k,n}^2}{2}\Big] \\ &\qquad + \frac{x_{k,n}^2}{2}\Big(\frac{k-n\lambda}{k}\Big). \end{aligned} \qquad (\star)$$

REMARQUE.— *Comment y arriver à cette expression ? En étudiant les ordres de grandeur ! Par construction, les $x_{k,n}$ sont compris entre a et b et pour $k \in I_n$, l'entier k est de l'ordre de grandeur de $n\lambda$, donc le quotient $\sqrt{n\lambda}/k$ est de l'ordre de grandeur de $1/\sqrt{n}$. Par conséquent, $u_{k,n}$ est un infiniment petit et on a ici écrit le développement limité à l'ordre deux de $\ell n(1-u)$ au voisinage de $u=0$. Comme nous cherchons des encadrements (et pas seulement des limites), la Formule de Taylor-Young nous est inutile, mais l'Inégalité de Taylor-Lagrange va exprimer toute sa puissance.*

❧ On sait que $a \leqslant x_{k,n} \leqslant b$ par **2.** Par ailleurs,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \in I_n, \quad 0 < \frac{\sqrt{n\lambda}}{k} \leqslant \frac{1}{a+\sqrt{n\lambda}}.$$

Donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \in I_n, \quad 0 < u_{k,n} \leqslant \frac{b}{a+\sqrt{n\lambda}}. \qquad (3)$$

Comme le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit qu'il existe un rang $n_3' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_3',\ \forall\, k \in I_n, \quad 0 < u_{k,n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après l'Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur $[0, 1/2]$, il existe une constante K_0 telle que

$$\forall\, u \in [0, 1/2], \quad \Big|\ell n(1-u) + u + \frac{u^2}{2}\Big| \leqslant K_0\, u^3.$$

On en déduit que, pour tout $n \geqslant n_3'$ et tout $k \in I_n$,

$$\Big|k\,\ell n(1-u_{k,n}) + k u_{k,n} + \frac{k u_{k,n}^2}{2}\Big| \leqslant K_0 b^3 \frac{n\lambda + b\sqrt{n\lambda}}{(a+\sqrt{n\lambda})^3} \qquad (4)$$

D'autre part,

$$\forall\, k \in I_n, \quad 0 < \frac{k-n\lambda}{k} \leqslant \frac{b}{a+\sqrt{n\lambda}}$$

et donc

$$\forall\, k \in I_n, \quad 0 \leqslant \frac{x_{k,n}^2}{2} \cdot \frac{k-n\lambda}{k} \leqslant \frac{b^3}{2(a+\sqrt{n\lambda})}. \qquad (5)$$

En sommant les encadrements (4) et (5), on prouve qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \geqslant n_3',\ \forall\, k \in I_n, \quad \Big|\ell n \frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}\Big| \leqslant \alpha_n. \qquad (6)$$

Comme α_n tend vers 0 et que

$$\ell n(1-\varepsilon) < 0 < \ell n(1+\varepsilon),$$

il existe un rang $n_4' \geqslant n_3'$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_4', \quad \ell n(1-\varepsilon) < -\alpha_n < 0 < \alpha_n < \ell n(1+\varepsilon).$$

L'encadrement (6) devient alors

$$\forall\, n \geqslant n_4',\ \forall\, k \in I_n, \quad \ell n(1-\varepsilon) \leqslant \ell n \frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})} \leqslant \ell n(1+\varepsilon)$$

et, par croissance de la fonction exp,

$$\forall\, n \geqslant n_4',\ \forall\, k \in I_n, \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})} \leqslant 1+\varepsilon.$$

❧ Pour conclure, on choisit

$$N_\varepsilon = \max\{n_1, n_4'\} \in \mathbb{N}$$

pour que les encadrements **5.a.** et **5.b.** soient simultanément vérifiés.

6. En combinant les encadrements obtenus au **5.a.** et au **5.b.**, on obtient que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$(1-\varepsilon)^2 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}}{\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})} \leqslant (1+\varepsilon)^2$$

ce qui signifie que le quotient tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Or, on a établi la convergence du dénominateur au **4.c.** et on en déduit enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\, e^{-n\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\, dt.$$

REMARQUE.— *Le résultat obtenu est vrai quels que soient a et b dans $\mathbb{R}$ (et pas seulement pour des réels positifs). Il s'agit d'un cas particulier du Théorème-Limite Central, qui joue effectivement un rôle central dans le calcul des probabilités et les études statistiques (attribué selon les goû ts à Laplace, à Gauss ou à l'un des Bernoulli).*