La modélisation d'un problème aléatoire

Voici un exercice classique de calcul des probabilités.

> *Trois coffres ont chacun deux tiroirs et chaque tiroir contient une pièce de monnaie. Le premier coffre contient deux pièces d'or ; le second coffre, deux pièces d'argent et le troisième contient une pièce d'or et une pièce d'argent.*
> *On ouvre au hasard l'un des tiroirs.*
> ❦ ***[1.]*** *Quelle est la probabilité de trouver une pièce d'argent ?*
> ❦ ***[2.]*** *Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, quelle est la probabilité de choisir le k-ième coffre ?*
> ❦ ***[3.]*** *Pour $1 \leqslant k \leqslant 3$, quelle est la probabilité de trouver une pièce d'argent sachant qu'on a choisi le k-ième coffre ?*
> ❦ ***[4.]*** *On a trouvé une pièce d'argent. Quelle est la probabilité d'avoir ouvert un tiroir du deuxième coffre ?*

Il est important de comprendre qu'il ne s'agit pas d'un énoncé de mathématiques — alors que le calcul des probabilités est une partie intégrante des mathématiques. Étrange, non ? Non, pas étrange — pénible.

Modélisation

La **modélisation** d'un problème concret a pour objectif de produire un **modèle**, c'est-à-dire une présentation mathématique précise de ce problème. C'est sur ce modèle que seront fondés tous les calculs ultérieurs. Les résultats de ces calculs dépendront donc des hypothèses faites lors de l'élaboration de ce modèle.

❧ Une modélisation contient nécessairement une part d'arbitraire : on peut expliquer l'origine des hypothèses qui sont faites, on doit expliciter clairement toutes les hypothèses qui sont faites, on ne peut pas démontrer que le modèle qu'on propose est vrai.

En revanche, on peut démontrer qu'un modèle est cohérent, c'est-à-dire que les hypothèses faites pour élaborer ce modèle ne se contredisent pas. C'est malheureusement une tâche assez difficile (compte tenu du programme) et il nous faudra toujours admettre que le modèle que nous proposons est effectivement cohérent.

❧ Voici le modèle que nous utiliserons pour mener les calculs.

> *Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et deux variables aléatoires discrètes*
>
> $$X : \Omega \to \{0; 1\} \quad \textit{et} \quad Y : \Omega \to \{1; 2; 3\}$$
>
> *telles que*
>
> $$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(Y = 3) = \frac{1}{3}$$
>
> *et que*
>
> $$\mathbf{P}(X = 1 \mid Y = 1) = 0, \qquad \mathbf{P}(X = 1 \mid Y = 2) = 1, \qquad \mathbf{P}(X = 1 \mid Y = 3) = 1/2.$$

❧ Quel est le sens de ce modèle ? Autrement dit, comment interpréter les hypothèses qui sont faites sur les variables aléatoires X et Y ?

La variable X suit une loi de Bernoulli (succès ou échec) et l'événement $[X = 1]$ signifie qu'on a tiré une pièce d'argent (succès). L'énoncé de l'expérience aléatoire ne permet pas de deviner le paramètre $\mathbf{P}(X = 1)$ de cette loi de Bernoulli, mais nous allons parvenir à le déduire de notre modèle.

La variable Y représente le coffre choisi par le joueur. Comme l'énoncé n'indique rien sur la manière de choisir un coffre, on fait l'hypothèse d'équiprobabilité : la loi de Y est la loi uniforme sur $\{1; 2; 3\}$.

De même, rien n'est précisé sur la manière de choisir un tiroir dans un coffre donné. On fait à nouveau l'hypothèse d'équiprobabilité : la probabilité de tirer une pièce d'argent dans un tiroir d'un coffre est égale à la proportion de pièces d'argent dans ce coffre.

❧ Il est important de bien comprendre que le choix d'un modèle résulte de décisions arbitraires : *faire l'hypothèse d'équiprobabilité est une décision arbitraire !* Elle n'est justifiée que par le fait qu'il n'y a pas de choix plus simple et que l'énoncé ne suggère pas qu'un modèle moins symétrique serait plus approprié.

Comme on disait autrefois : *"il faut qu'il en soit ainsi, car on ne voit pas pourquoi il en pourrait en être autrement".*

❧ On l'a dit, il est difficile de *démontrer* rigoureusement que notre modèle est cohérent. Indiquons cependant pourquoi il l'est.

Notre modèle fait intervenir deux variables aléatoires discrètes X et Y. La loi de Y est décrite par le modèle et nous disposons d'informations suffisantes pour en déduire la loi du couple (X, Y). En effet, le modèle choisi nous donne la valeur de

$$\forall\, j \in [\![1, 3]\!], \quad \mathbf{P}(X = 1, Y = j) = \mathbf{P}(X = 1 \mid Y = j) \times \mathbf{P}(Y = j)$$

et comme X est une variable de Bernoulli, on a aussi

$$\forall\, j \in [\![1, 3]\!], \quad \mathbf{P}(X = 0, Y = j) = \mathbf{P}(X = 0 \mid Y = j) \times \mathbf{P}(Y = j) = \big[1 - \mathbf{P}(X = 1 \mid Y = j)\big] \times \mathbf{P}(Y = j).$$

On peut donc déduire du modèle choisi la valeur de $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$ pour tout $(i, j) \in \{0; 1\} \times [\![1, 3]\!]$, ce qui signifie que la loi du couple (X, Y) est déterminée par le modèle et que nous pourrons en déduire la loi de X, ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X, c'est-à-dire les probabilités

$$\mathbf{P}(Y = j \mid X = i) = \frac{\mathbf{P}(X = i, Y = j)}{\mathbf{P}(X = i)}$$

pour tout $(i, j) \in \{0, 1\} \times [\![1, 3]\!]$.

Exploitation du modèle

❧ Question **[1.]** : il s'agit de calculer $\mathbf{P}(X = 1)$.

Le modèle nous donne la loi conditionnelle de X sachant Y, c'est-à-dire toutes les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(X = i \mid Y = j)$. Or $([Y = j])_{j \in [\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements et on peut déduire de la Formule des probabilités totales que

$$\mathbf{P}(X = 1) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(X = 1 \mid Y = j) \cdot \mathbf{P}(Y = j) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

❧ Question **[2.]** : question idiote, puisqu'on y répond par une hypothèse du modèle en attribuant une valeur à $\mathbf{P}(Y = j)$ pour $j \in [\![1, 3]\!]$ (par un calcul de proportion), on n'a pas déduit cette valeur d'un calcul de probabilité.

❧ Question **[3.]** : même commentaire ! On a attribué une valeur à $\mathbf{P}(X = 1 \mid Y = j)$ pour $j \in [\![1, 3]\!]$ (à nouveau par un calcul de proportions).

❧ Question **[4.]** : il s'agit cette fois de calculer $\mathbf{P}(Y = 2 \mid X = 1)$. Au contraire des deux questions précédentes et à l'image de la première question, nous allons déduire cette probabilité du modèle que nous avons choisi.

D'après la définition des probabilités conditionnelles (Formule de Bayes),

$$\mathbf{P}(Y = 2 \mid X = 1) = \frac{\mathbf{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbf{P}(X = 1)} = \frac{\mathbf{P}(X = 1 \mid Y = 2)\, \mathbf{P}(Y = 2)}{\mathbf{P}(X = 1)} = \frac{1 \cdot {}^{1}\!/_{3}}{{}^{1}\!/_{2}} = \frac{2}{3}.$$