Espaces euclidiens (première partie)

1. Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces *réels*.

2. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1
$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad (A^\top.B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}.$$

2.2 Si $X^\top.A.Y = X^\top.B.Y$ quelles que soient les colonnes X et Y, alors $A = B$.

2.3 Si $X^\top.A.X = X^\top.B.X$ quelle que soit la colonne X, alors la matrice $A - B$ est antisymétrique.

En particulier, si A et B sont deux matrices symétriques telles que
$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.A.X = X^\top.B.X,$$
alors $A = B$.

I

Produits scalaires

3. ✍ *Un* **produit scalaire** *sur l'espace vectoriel réel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est*

3.1 **bilinéaire** *:*

Quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in E^3$,
$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \varphi(y, z)$$
$$\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, z)$$

3.2 **symétrique** *:*
$$\forall\, (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

3.3 *et* **définie positive** *:*
$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

4. ✍ *Un* **espace préhilbertien** *est un espace vectoriel E sur lequel est défini un produit scalaire.*

5. ✍ *Un* **espace euclidien** *est un espace préhilbertien de dimension finie.*

6. **Exemples canoniques**

6.1 Sur $E = \mathbb{R}^n$:
$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

6.2 Sur l'espace $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes :
$$\forall\, (X, Y) \in E \times E, \quad \varphi(X, Y) = X^\top.Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

6.3 Sur l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées :
$$\forall\, (A, B) \in E \times E, \quad \varphi(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top.B) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} b_{k,\ell}.$$

6.4 Sur l'espace $E = \ell^2(\mathbb{N})$ des suites réelles de carré sommable :
$$\forall\, (u, v) \in E \times E, \quad \varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

6.5 Sur l'espace $E = \mathscr{L}_c^2(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur $I = [0, +\infty[$:
$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. **Exemples usuels**

7.1 Sur $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:
$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.2 Sur l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.3 Soit $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs. L'application définie par
$$\forall\, (X, Y) \in E \times E, \quad \varphi(X, Y) = X^\top.D.Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k$$
est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

7.4 Sur l'espace $E = \mathscr{L}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues et bornées :
$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

7.5 Sur l'espace $E = \ell^1(\mathbb{R})$ des séries réelles absolument convergentes :
$$\forall\, (u, v) \in E \times E, \quad \varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

8. **Représentation matricielle**

Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$, une base de l'espace euclidien E.

8.1 ✍ *La* **matrice de Gram relative à** *$\mathscr{B}$ est la matrice*
$$\Gamma = \big(\langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle\big)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}.$$

8.2 Une base est orthonormée si, et seulement si, sa matrice de Gram est la matrice identité.

8.3 La matrice de Gram est une matrice symétrique réelle.

8.4 Elle représente le produit scalaire $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ dans la base $\mathscr{B}$ au sens suivant : quels que soient les deux vecteurs x et y dans E, si $X = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, alors
$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = X^\top.\Gamma.Y.$$

8.5 Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E, sa matrice de Gram est inversible.

8.6 Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E et P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors la matrice de Gram relative à la base $\mathscr{B}'$ est égale à
$$\Gamma' = P^\top.\Gamma.P.$$

I.1 Définitions d'une structure euclidienne

9. Structure définie par un produit scalaire
La première manière de définir une structure euclidienne sur un espace vectoriel E consiste à définir explicitement un produit scalaire sur E.
Parmi les bases de E, seules les bases orthonormées sont alors vraiment intéressantes. →**[26]**

10. Structure définie par une base
L'autre manière de définir une structure euclidienne consiste à choisir une base de référence et décider que cette base sera orthonormée, ce qui définit implicitement un, et un seul, produit scalaire sur E.
C'est ainsi qu'est définie, sur chaque espace qui admet une base canonique, une structure euclidienne canonique.
10.1 Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E. Il existe une, et une seule, famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de formes linéaires sur E définies par :

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) \cdot e_k.$$

Ces formes linéaires sont appelées ***formes linéaires coordonnées relatives à la base*** $\mathscr{B}$ et constituent une base de l'espace $\mathrm{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E, dite ***base duale*** de $\mathscr{B}$.
10.2 L'application définie par

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (\, x \,|\, y \,) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k^*(y)$$

est l'unique produit scalaire sur E tel que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormée.
10.3 ✍ **Structure euclidienne canonique**
L'espace $\mathbb{R}^n$ *est muni de sa* **structure euclidienne canonique** *lorsque la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *est une base orthonormée.*

I.2 Norme associée au produit scalaire

11. ✍ *Si E est muni d'un produit scalaire φ, la* **norme** *sur E associée à ce produit scalaire est définie par*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

12. Formule de polarisation
La ***formule de polarisation***

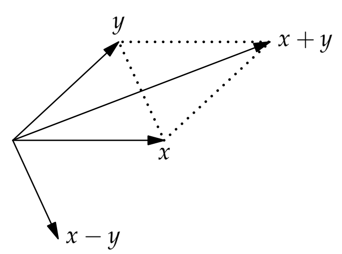
$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\varphi(x,y)$$

permet d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme qui lui est associée :

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big]$$

13. Identité du parallélogramme
Quels que soient x et y dans E,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$



14. → Inégalité de Schwarz et cas d'égalité
14.1 *Quels que soient x et y dans E,*

$$\big|\varphi(x,y)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.
14.2 *L'égalité $\varphi(x,y) = \|x\|\,\|y\|$ a lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.*
14.3 *L'égalité $\varphi(x,y) = -\|x\|\,\|y\|$ a lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de sens opposés.*

15. Applications
15.1

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

15.2 Pour $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} k a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} k b_k^2\Big).$$

15.3

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\,\sqrt{\mathrm{tr}(A^\top . A)}$$

16. Inégalité triangulaire et cas d'égalité
16.1 → *Quels que soient x et y dans E,*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

16.2 Les égalités

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \qquad \|x-y\| = \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

ont lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.
16.3 Il y a égalité

$$\|x+y\| = \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de sens opposés.

I.3 Orthogonalité

17. ✍ *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est* **orthogonale** *lorsque les vecteurs qui la constituent sont deux à deux orthogonaux.*
18. ✍ *Une famille orthogonale $(x_i)_{i \in I}$ est* **orthonormée** *lorsque les vecteurs x_i sont unitaires.*
19. → Caractérisation des familles orthonormées
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormée si, et seulement si,

$$\forall\, (i,j) \in I \times I, \quad (\, x_i \,|\, x_j \,) = \delta_{i,j}.$$

20.1 → *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*
20.2 → *Une famille orthonormée est libre.*
21. Exemples fondamentaux
21.1 Pour $E = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la base canonique de E est orthonormée pour le produit scalaire canonique sur E.
21.2 *Suite de* **[7.2]** – On pose $u_0 = [t \mapsto 1]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{-n} = [t \mapsto \cos nt] \quad \text{et} \quad u_n = [t \mapsto \sin nt]\,.$$

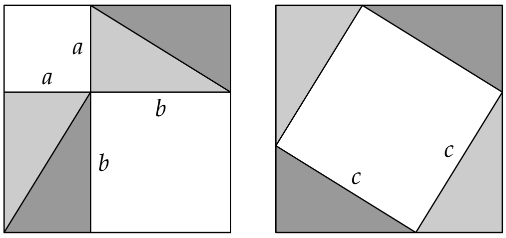
La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale, mais pas orthonormée.
22. Théorème de Pythagore
22.1 Quelle que soit la famille de vecteurs $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\, x_i \,|\, x_j \,) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\, x_i \,|\, x_j \,)\,.$$

22.2 ➙ *Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une famille orthogonale. Alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

22.3 **Preuve sans parole**



22.4 ➙ *Si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors x et y sont orthogonaux.*

23. ✍ *Soit A, une partie de E. L'***orthogonal** *de A, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :*

$$A^\perp = \big\{ x \in E \,:\, \forall\, y \in A,\ (\, x \,|\, y \,) = 0 \big\}.$$

24.1 ✍ *Deux sous-espaces F et G sont* **orthogonaux** *lorsque*

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad (\, x \,|\, y \,) = 0.$$

Cette relation est notée : $F \perp G$.

24.2 ➙ *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si, et seulement si, $G \subset F^\perp$.*

24.3 **Utilisation de familles génératrices**

Les sous-espaces $F = \operatorname{Vect}(x_i,\ i \in I)$ et $G = \operatorname{Vect}(y_j,\ j \in J)$ sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall\, (i,j) \in I \times J, \quad (\, x_i \,|\, y_j \,) = 0.$$

25. **Orthogonalité et somme directe**

25.1 Si les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \{0\}$.

25.2 ➙ *Si $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.*

25.3 Dans ce cas, leur somme est notée

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n}} F_i$$

et dite ***somme directe orthogonale*** des F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Bases orthonormées

26. On considère ici une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad (\, e_i \,|\, e_j \,) = \delta_{i,j}.$$

26.1 **Coordonnées d'un vecteur**

Les coordonnées d'un vecteur x relatives à la base orthonormée $\mathscr{B}$ se calculent par un produit scalaire :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad x_k = (\, e_k \,|\, x \,)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (\, e_k \,|\, x \,) \cdot e_k.$$

26.2 **Expression de la norme**

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\, e_k \,|\, x \,)^2.$$

26.3 **Expression du produit scalaire**

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (\, x \,|\, y \,) = \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, (\, e_k \,|\, y \,) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Autrement dit, si les vecteurs x et y sont représentés par les colonnes X et Y *dans une base orthonormée* de E, alors

$$(\, x \,|\, y \,) = X^\top . Y.$$

26.4 **Matrice et trace d'un endomorphisme**

$$\forall\, u \in \mathrm{L}(E), \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \Big(\big(\, e_i \,\big|\, u(e_j) \,\big) \Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \big(\, e_k \,\big|\, u(e_k) \,\big).$$

27. **Bases orthonormées et sommes directes orthogonales**

27.1 On suppose connue une décomposition de E en somme directe orthogonale

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}} E_i$$

et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on suppose connue une base orthonormée

$$\mathscr{B}_i = (e_k)_{k_{i-1} < k \leqslant k_i}$$

du sous-espace E_i (avec $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_r = \dim E$). Alors la famille

$$\mathscr{B} = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}} \mathscr{B}_i = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant \dim E}$$

est une base orthonormée de E.

27.2 Réciproquement, étant donnée une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E et des indices

$$0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_r = d,$$

les sous-espaces $E_i = \operatorname{Vect}(e_k,\ k_{i-1} < k \leqslant k_i)$ définissent une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant d}} E_i.$$

27.3 ✍ *Dans les deux cas, la base $\mathscr{B}$ est dite* **adaptée à la décomposition de E en somme directe orthogonale**.

I.4 Projections orthogonales

28. **Le problème du supplémentaire orthogonal**

Soit F, un sous-espace de E.

28.1 Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont en somme directe [**25.2**], mais la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ n'est définie que si l'orthogonal de F est un supplémentaire de F dans E.

28.2 ➙ *Soit F, un sous-espace vectoriel de E. S'il existe un sous-espace vectoriel G tel que*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G,$$

alors $G = F^\perp$.

28.3 ✍ *Si $E = F \oplus F^\perp$, on dit que $F^\perp$ est* **le supplémentaire orthogonal de** F.

28.4 Si $E = F \oplus F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

29. ✍ *Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la* **projection orthogonale sur** F *est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

30. ✍ *Un endomorphisme $p \in \mathrm{L}(E)$ est une* **projection orthogonale** *si, et seulement si, il existe un sous-espace F tel que*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et que p soit la projection orthogonale sur F.

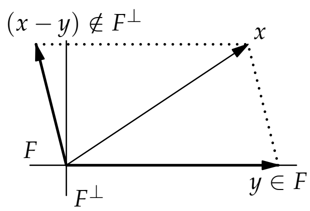
31. ➙ *Si E admet une décomposition en somme directe orthogonale :*

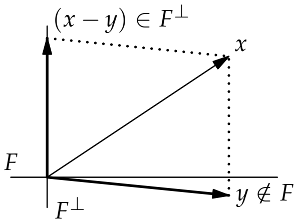
$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant n}} F_k,$$

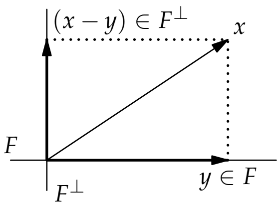
alors les projections associées à cette décomposition de E sont des projections orthogonales.

32. ➙ **Caractérisation du projeté orthogonal**
On suppose que $E = F \oplus F^{\perp}$. Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est l'unique vecteur $y \in E$ qui soit solution du système suivant.

$$\begin{cases} x - y \in F^{\perp} \\ \quad\; y \in F \end{cases}$$







33. Soit $(e_1, \dots, e_q)$, une base de F. Alors

$$(x-y) \in F^{\perp} \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant q, \quad (\, y \,|\, e_k \,) = (\, x \,|\, e_k \,)$$

et

$$y \in F \iff \exists\, (\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant q} \in \mathbb{R}^q, \quad y = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \cdot e_k.$$

Le calcul de la projection sur F revient ainsi à inverser une matrice de Gram. →[135.4]

34.1 Si l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique, alors

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

et le projeté orthogonal d'une matrice M sur le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est la matrice

$$\frac{1}{2}(M + M^{\top}).$$

34.2 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer le projeté orthogonal de $x = (1, -2, 3)$ sur le plan F dirigé par $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (-1,2,1)$.

Caractérisation des projections orthogonales

35. Soit $z_t = x_0 + t y_0$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\min_{u \in \mathbb{R}} \|z_u\|^2 = \|x_0\|^2 - \Big[\frac{(\, x_0 \,|\, y_0 \,)}{\|y_0\|}\Big]^2 \leqslant \|x_0\|^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

36. ➙ *On suppose que $E = F \oplus G$ et que p est la projection sur F parallèlement à G. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

36.1 *La projection p est une projection orthogonale ($G = F^{\perp}$).*

36.2

$$\forall\, x \in E, \quad p(x) \perp x - p(x).$$

36.3

$$\forall\, x, y \in E, \quad (\, x \,|\, p(y) \,) = (\, p(x) \,|\, y \,).$$

36.4

$$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Projections orthogonales et bases orthonormées

37. Soit F, un sous-espace vectoriel de E dont on connaît une base orthonormée $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$.

37.1 Pour tout $x \in E$, le vecteur

$$p(x) = \sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\, e_k$$

appartient à F et le vecteur $x - p(x)$ appartient à $F^{\perp}$, si bien que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}.$$

37.2 ➙ *Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$, les projetés orthogonaux de x sur F et sur $F^{\perp}$ sont respectivement*

$$\sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\, e_k \qquad \text{et} \qquad x - \sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\, e_k.$$

37.3 ▷ *Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une base* orthogonale *de F, alors le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est le vecteur*

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(\, u_k \,|\, x \,)}{\|u_k\|^2}\, u_k.$$

38. **Traduction matricielle**
Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E.

38.1 ➙ *Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F, alors la matrice relative à $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F est égale à*

$$\sum_{k=1}^{r} V_k V_k^{\top}$$

où $V_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(e_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

38.2 ▷ *Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une base orthogonale de F, alors la matrice relative à $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F est égale à*

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{U_k U_k^{\top}}{U_k^{\top}.U_k}$$

où $U_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

39. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des projections orthogonales :

1. sur la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 2, -1)$;
2. sur la droite $[x + 3y - z = 0] \cap [2x - y + z = 0]$;
3. sur le plan $[x + y - 3z = 0]$;
4. sur le plan engendré par $u_1 = (1,2,2)$ et $u_2 = (-2,0,1)$;
5. sur le plan engendré par $v_1 = (1,2,3)$ et $v_2 = (-1,2,1)$.

40. Algorithme de Gram-Schmidt
On considère un sous-espace F d'un espace préhilbertien réel E. Si F est un espace de dimension finie, il admet une base $(x_1, \dots, x_d)$. Dans le cas contraire, on suppose que F admet une base dénombrable $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Dans ces deux cas, l'algorithme de Gram–Schmidt construit par récurrence une base orthonormée de F.
40.1 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

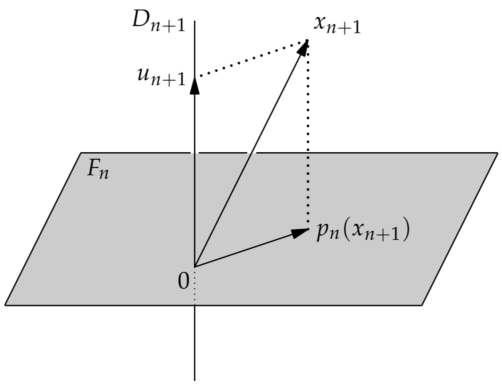
$$F_n = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

40.2 On suppose connue une base orthonormée de F_n :

$$F_n = \operatorname{Vect}(y_1, \dots, y_n).$$

Le vecteur x_{n+1} n'appartenant pas à F_n, on considère le vecteur

$$u_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (\, x_{n+1} \,|\, y_k \,)\; y_k \neq 0_E.$$



40.3 Le vecteur

$$y_{n+1} = \pm \frac{u_{n+1}}{\|u_{n+1}\|}$$

est unitaire et orthogonal à F_n et

$$\operatorname{Vect}(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

40.4 → Conclusion
Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants, il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Vect}(x_0, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de passage de $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ à $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une matrice triangulaire supérieure.

41. Théorème de la base orthonormée incomplète
41.1 → *Un espace préhilbertien réel de dimension finie ou dénombrable admet (au moins) une base orthonormée.*
41.2 → *Pour tout sous-espace F de E, espace euclidien, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_F$ de E adaptée à F.*
De plus,

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp},$$

donc la projection orthogonale sur F est bien définie et la base orthonormée $\mathscr{B}_F$ est aussi adaptée à cette décomposition de E.
41.3 Si E est un espace euclidien, alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$ pour tout sous-espace vectoriel F de E.

42. Inégalité d'Hadamard
1. Soit $X = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$, la matrice colonne qui représente un vecteur u dans une base orthonormée.
Alors $\|u\|^2 = X^{\top}.X$ et $\|u\| \geqslant |X_k|$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.
2.

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|$$

Distance à un sous-espace

43. Soit F, un sous-espace vectoriel de E. La ***distance d'un point*** $x \in E$ ***au sous-espace*** F est définie par

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x, y).$$

43.1 La distance d'un point de E à un sous-espace vectoriel de E est bien définie.
43.2 Il existe une suite bornée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F tels que

$$\mathrm{d}(x, F) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x, y_n).$$

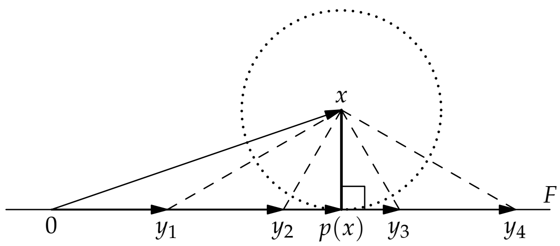
43.3 La distance $\mathrm{d}(x, F)$ est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers x.
43.4 ✍ *Le sous-espace F est* **dense** *dans E lorsque tout vecteur x de E est limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F.*
43.5 Si le sous-espace F est dense dans E, alors le vecteur nul est le seul vecteur de E qui soit orthogonal à F :

$$F^{\perp} = \{0\}.$$

44. Caractérisation métrique du projeté orthogonal
44.1 Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors

$$\forall\, (x, y) \in E \times F, \quad \|x - y\| \geqslant \big\|x - p(x)\big\|$$

où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.



44.2 → Distance à un sous-espace de dimension finie
Soit F, un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(x, F)$, de sorte que

$$\mathrm{d}(x, F) = \sqrt{(\, x \,|\, x - p_F(x) \,)} = \min_{y\in F} \mathrm{d}(x, y).$$

44.3 Distance à un hyperplan
Soit H, un hyperplan de E. S'il existe un vecteur $n \in E$ tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot n,$$

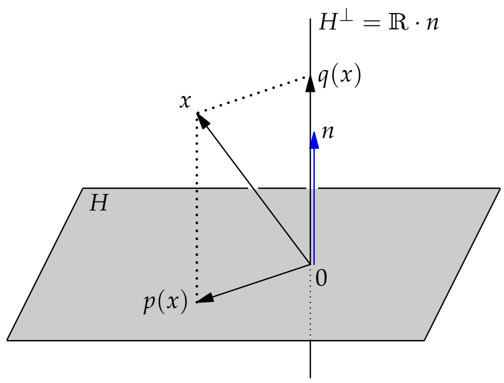
alors le projeté orthogonal de $x \in E$ sur H est le vecteur

$$p(x) = x - \frac{(\, n \,|\, x \,)}{\|n\|^2} \cdot n$$

et la distance de x à H est donnée par :

$$\mathrm{d}(x, H) = \frac{\big|(\, x \,|\, n \,)\big|}{\|n\|}.$$

Cette distance $\mathrm{d}(x, H)$ est nulle si, et seulement si, $x \in H$.



Entraînement

45. Questions pour réfléchir

1. Soit E, un espace préhilbertien réel.

1.a Si f et g sont deux applications de E dans E telles que

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \big(f(x)\,\big|\,y\big)=\big(x\,\big|\,g(y)\big),$$

alors f et g sont linéaires.

1.b Si f est une application de E dans E telle que

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \big(f(x)\,\big|\,f(y)\big)=\big(x\,\big|\,y\big),$$

alors f est linéaire.

2. Condition sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que l'application définie par

$$\forall\,(u,v)\in E\times E,\quad \varphi(u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nu_nv_n$$

soit un produit scalaire sur $E=\ell^2(\mathbb{R})$.

3. Condition sur la fonction K pour que l'application définie par

$$\forall\,(f,g)\in E\times E,\quad \varphi(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)K(t)\,\mathrm{d}t$$

soit un produit scalaire sur $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

4. Soit $u\in L(E)$. Tout sous-espace propre de u contient un vecteur unitaire.

5. Le plan étant muni de sa structure euclidienne canonique, trouver trois vecteurs x, y et z tels que

$$\|x+y+z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2.$$

La famille (x,y,z) est-elle orthogonale ?

6. Si $F_1,\dots,F_n$ sont des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux, alors

$$\forall\,1\leqslant i<n,\quad (F_1\oplus\cdots\oplus F_i)\perp(F_{i+1}\oplus\cdots\oplus F_n).$$

7. Soient V, un espace de dimension finie ; φ et ψ, deux produits scalaires sur V. S'il existe une base $\mathscr{B}$ de V qui est orthonormée à la fois pour φ et ψ, alors $\varphi=\psi$.

8. Comparer l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée de E avec l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

9. Décrire les bases orthonormées qui résultent de l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à :

9.a une famille orthogonale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

9.b une famille orthonormée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. *Suite de* **[44.3]** – S'il existe un vecteur $u\in E$ tel que

$$E=H\overset{\perp}{\oplus}\mathbb{R}\cdot u,$$

alors l'hyperplan H n'est pas dense dans E.

46. Soient x et y, deux vecteurs non nuls. Alors

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\right\|=\frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

47. Si x et y sont deux vecteurs unitaires distincts, alors

$$\forall\,t\in\,]0,1[,\quad \big\|(1-t)x+ty\big\|<1.$$

Interprétation géométrique de l'inégalité ?

48. Développer l'expression

$$\big\|\,\|y\|^2\cdot x-\varphi(x,y)\cdot y\big\|^2$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ) et interpréter géométriquement.

49. Produit scalaire associé à un automorphisme de E

Soit $u\in GL(E)$.

49.1 L'application

$$\varphi_u=\big[(x,y)\mapsto\big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)\big]$$

est un produit scalaire sur E.

49.2 Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E pour le produit scalaire de référence $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Si $P=\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors la matrice de φ_u relative à $\mathscr{B}$ est égale à $P^\top.P$.

50.

1. Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+^*$ est continue, alors

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1\frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)\geqslant 1$$

avec égalité si, et seulement si, f est constante.

2. Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[0,1]$ telles que $f(t)g(t)\geqslant 1$ pour tout $t\in[0,1]$. Alors

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\geqslant 1.$$

51. Soit f, une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $[t\mapsto tf(t)]$ et $[t\mapsto f'(t)]$ sont deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

51.1 Les deux fonctions $[t\mapsto f(t)]$ et $[t\mapsto tf(t)f'(t)]$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

51.2 Comme

$$\forall\,x\geqslant 0,\quad xf^2(x)=\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t+2\int_0^x tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

alors $xf^2(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et

$$\left(\int_0^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant 4\int_0^{+\infty}t^2f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}[f'(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Orthogonalité

52. Soit u, un endomorphisme de E, espace euclidien. On suppose que

$$\forall\,x\in E,\quad \big\|u(x)\big\|\leqslant\|x\|.$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$q(t)=\|x+ty\|^2-\big\|u(x+ty)\big\|^2\geqslant 0$$

donc

$$E=\operatorname{Ker}(u-I)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(u-I).$$

53. Soit $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$.

1. L'application φ définie par

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$$

est un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il existe une base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de E qui est orthonormée pour φ, telle que $\deg P_k=k$ pour tout $0\leqslant k\leqslant n$ et que

$$\forall\,0\leqslant j,k\leqslant n,\quad P_k^{(j)}(a_j)=\left|\begin{array}{ll}0 & \text{si } j\neq k,\\ \pm1 & \text{si } j=k.\end{array}\right.$$

54. On suppose que $\ell^2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang est réduit à $\{0\}$.

Projections orthogonales

55. Si un sous-espace F et son orthogonal $F^{\perp}$ sont supplémentaires l'un de l'autre dans un espace de dimension finie, il n'en va pas toujours de même dans un espace de dimension infinie.
On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(\, f \,|\, g \,) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

55.1 On considère le sous-espace vectoriel F constitué des fonctions polynomiales sur $[-1,1]$.
1. Pour tout $f \in E$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tels que $\|f - g_n\|$ tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Si $f \in F^{\perp}$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\, f \,|\, g_n \,) = 0,$$

donc $F^{\perp} = \{0_E\}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = E$.
55.2 Le sous-espace G_- des fonctions de E qui sont nulles sur $[-1,0]$ est l'orthogonal du sous-espace G_+ des fonctions de E qui sont nulles sur $[0,1]$. Les sous-espaces G_+ et G_- sont-ils supplémentaires dans E ?
56. L'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\, f \,|\, g \,) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère les sous-espaces vectoriels

$$A = \big\{ f \in E \;:\; f'' = f \big\} \quad \text{et} \quad B = \big\{ f \in E \;:\; f(1) = f(0) = 0 \big\}$$

ainsi que le sous-espace affine

$$H = \big\{ f \in E \;:\; f(1) = 1,\ f(0) = \operatorname{ch} 1 \big\}.$$

56.1 Le couple $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de A. Comme

$$\forall\, f \in A,\ \forall\, g \in E, \quad (\, f \,|\, g \,) = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$$

on a : $(\, \operatorname{ch} \mid \operatorname{sh} \,) = \operatorname{sh}^2 1$ et $\|\operatorname{ch}\|^2 = \|\operatorname{sh}\|^2 = \operatorname{sh} 2/2$.
56.2 La fonction f_0 définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = \operatorname{ch}(1-x)$$

appartient à A et à H.
56.3 Les sous-espaces A et B sont orthogonaux et supplémentaires dans E. Le projeté orthogonal de $f \in E$ sur le sous-espace A est défini par

$$\pi(f) = \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \cdot \operatorname{sh} + f(0) \cdot \operatorname{ch}.$$

En particulier, si $f \in H$, alors $\pi(f) = f_0$.
56.4 Lorsque f parcourt H, l'expression

$$q(f) = \int_0^1 [f(t)]^2 + [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

est minimale pour $f = f_0$ et $q(f_0) = \operatorname{sh} 2/2$.

Distance à un sous-espace

57. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$.
57.1 L'ensemble H défini par

$$H = \Big\{ P \in E \;:\; \int_1^2 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Big\}$$

est un sous-espace de E.
57.2 On définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_k$$

quels que soient les polynômes

$$P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k.$$

L'orthogonal de H pour ce produit scalaire est la droite dirigée par le polynôme

$$P_0 = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}\, X^k.$$

En déduire la distance du monôme 1 au sous-espace H.
58. Soient $a_0, \ldots, a_n$, des réels.
58.1 À quelle condition sur les réels $a_0, \ldots, a_n$ l'expression

$$(\, P \,|\, Q \,) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$?
58.2 L'orthogonal du sous-espace

$$F = \Big\{ P \in E \;:\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \Big\}$$

est la droite vectorielle dirigée par le monôme 1.
58.3 La distance du monôme X^n au sous-espace F est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \Big|.$$

59. Calculs de distance
Les formules suivantes peuvent être interprétées comme les distances d'un point à un sous-espace pour divers produits scalaires. On peut ainsi déterminer le point où le minimum est atteint [**33**], puis en déduire la valeur du minimum [**44.3**].
59.1

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 36$$

Le minimum est atteint en $(a,b,c) = (6,-18,9)$.
59.2

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{175}$$

Le minimum est atteint en $(a,b,c) = (0, 3/5, 0)$.
59.3

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(\sqrt{t} - a - bt\big)^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}$$

Le minimum est atteint en $(a,b) = (3\pi/32,\ 15\pi/64)$.
59.4 La fonction φ définie par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = \int_0^1 t^2(\ell n\, t - xt - y)^2\,\mathrm{d}t$$

atteint son minimum global en $(x,y) = (5/3, -19/12)$.
60. L'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique [**34.1**].
60.1 La distance de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à $\sqrt{11}$.
60.2 L'ensemble $H = [\operatorname{tr}(M) = 0]$ est un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et la distance de I_3 à cet hyperplan est égale à $\sqrt{3}$.

61. Approximation au sens des moindres carrés
L'espace $E = \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Étant donné $y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'équation matricielle

$$Ax = y_0$$

d'inconnue $x \in E$, avec $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes : $\operatorname{rg} A = p$.
61.1 Si $n = p$, alors A est inversible et l'équation admet une seule solution, égale à $A^{-1}y_0$.
61.2 ✍ *La matrice colonne $x_0 \in E$ est dite* **solution approchée au sens des moindres carrés** *lorsque*

$$\|y_0 - Ax_0\| = \inf_{x \in E} \|y_0 - Ax\|.$$

61.3 On suppose que $n > p$.
1. L'équation $Ax = y_0$ admet au plus une solution $x_0 \in E$.
2. Elle admet une, et une seule, solution approchée au sens des moindres carrés : l'unique vecteur $x_0 \in E$ tel que Ax_0 soit le projeté orthogonal de y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$.
3. Ce vecteur x_0 est l'unique solution de l'équation

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0.$$

4. Si $A^\top.Ax = 0$, alors $\|Ax\| = 0$, donc la matrice $A^\top.A$ est inversible. La matrice $(A^\top.A)^{-1}A^\top$ est parfois appelée ***pseudo-inverse*** de A.

62. Application : droite de régression
On considère deux statistiques réelles $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. On note respectivement s_x, s_y, s_{x^2} et s_{xy}, les moyennes arithmétiques des statistiques suivantes :

$$(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, \quad (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}, \quad (x_k^2)_{1\leqslant k\leqslant n} \quad \text{et} \quad (x_k y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}.$$

62.1 Chercher la droite $y = ax + b$ telle que l'erreur quadratique

$$\varepsilon(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$$

soit minimale revient à chercher la solution approchée au sens des moindres carrés du système

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

62.2 Cette solution approchée est :

$$a_0 = \frac{s_{xy} - s_x s_y}{s_{x^2} - (s_x)^2}, \quad b_0 = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{s_{x^2} - (s_x)^2} = s_y - a_0 s_x.$$

62.3 Il ne revient pas au même de minimiser $\varepsilon(a,b)$ et

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \alpha y_k - \beta)^2$$

puisqu'on obtient, en général, deux droites distinctes.

II

Adjoint d'un endomorphisme

63. Sauf mention contraire, on travaille ici dans un espace euclidien, c'est-à-dire un espace de dimension finie.
64. Représentation des formes linéaires
Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$, un espace euclidien. Pour tout vecteur $a \in E$, on pose

$$\varphi_a = [x \mapsto (a\,|\,x)].$$

64.1 L'application φ_a est une forme linéaire sur E, dont le noyau est $(\mathbb{R}\cdot a)^\perp$ et

$$E = \operatorname{Ker} \varphi_a \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R}\cdot a).$$

64.2 Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors

$$a = \sum_{k=1}^{n} \varphi_a(e_k)\cdot e_k.$$

64.3 Théorème de Riesz
Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un, et un seul, vecteur $a \in E$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x) = (a\,|\,x).$$

65. Soit u, un endomorphisme d'un espace euclidien E.
65.1 Si

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (x\,|\,u(y)) = 0,$$

alors u est l'endomorphisme nul.
65.2 Soit v, un endomorphisme de E tel que

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (u(x)\,|\,y) = (v(x)\,|\,y).$$

Alors $u = v$.
65.3 Pour tout $x \in E$, l'application $[y \mapsto (x\,|\,u(y))]$ est une forme linéaire sur E. Il existe un, et un seul, endomorphisme v de E tel que

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (x\,|\,u(y)) = (v(x)\,|\,y).$$

65.4 ✍ *Soit u, un endomorphisme de l'espace euclidien E. L'***adjoint** *de u est l'endomorphisme, noté u^*, tel que*

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad (x\,|\,u(y)) = (u^*(x)\,|\,y).$$

65.5 En particulier, $I_E^* = I_E$.
66. Soit E, un espace euclidien.
66.1 ➙ *Quel que soit l'endomorphisme u,*

$$(u^*)^* = u.$$

66.2 ➙ *Quels que soient les endomorphismes u et v,*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$$

et

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*.$$

66.3 Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

67. ➙ Adjoint et sous-espaces stables
Si le sous-espace F est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint u^*.
68. Représentation matricielle
Soit u, un endomorphisme de E représenté par la matrice A dans une base $\mathscr{B}$.
68.1 ➙ *Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = A^\top.$$

68.2 Les endomorphismes u et u^* ont même déterminant : $\det u^* = \det u$.
68.3 Si $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est une base (quelconque) de E, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = \Gamma^{-1}.A^\top.\Gamma$$

où Γ est la matrice de Gram [8] de la base $\mathscr{B}$.

Endomorphismes auto-adjoints

69.1 ✍ *Un endomorphisme $u \in L(E)$ est dit* **auto-adjoint** *(ou* **symétrique***) lorsque*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E est noté $\mathcal{S}(E)$.

69.2 ➞ *L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.*

70. Soit $(e_1, \dots, e_n)$, une base de E. Un endomorphisme u de E est auto-adjoint si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad (e_i \mid u(e_j)) = (u(e_i) \mid e_j).$$

71. ➞ *Soit $u \in L(E)$.*

71.1 *Si u est un endomorphisme auto-adjoint, alors la matrice de u relative à une base orthonormée quelconque de E est une matrice symétrique.*

71.2 *S'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique, alors u est un endomorphisme auto-adjoint.*

72. ➞ *Si $\dim E = n$, alors*

$$\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

73. Exemples géométriques

73.1 ➞ *Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Alors p est un endomorphisme auto-adjoint si, et seulement si, p est un projecteur orthogonal* **[36.3]**.

73.2 Soient p, un projecteur et s, la symétrie définie par

$$2p = I_E + s.$$

Alors

$$\mathrm{Ker}(s - I_E) = \mathrm{Im}\, p \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(s + I_E) = \mathrm{Ker}\, p$$

et d'autre part $p \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $s \in \mathcal{S}(E)$.
Une symétrie $s \in L(E)$ est donc un endomorphisme auto-adjoint si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale.

74. ➞ *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, un endomorphisme auto-adjoint.*
S'il existe un sous-espace F stable par u, alors l'orthogonal $F^\perp$ est également stable par u et la matrice de u relative à une base orthonormée adaptée à la décomposition en somme directe orthogonale

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant des matrices symétriques réelles.

Entraînement

75. Soit $u \in L(E)$.
1. L'endomorphisme $u^* \circ u$ est auto-adjoint.
2. Pour tout $x \in E$, le scalaire $(x \mid (u^* \circ u)(x))$ est positif. Ce scalaire est nul si, et seulement si, x appartient à $\mathrm{Ker}\, u$.

76. Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, deux bases orthonormées de E. La somme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (u(e_i) \mid \varepsilon_j)^2$$

est égale **[26.4]** à la trace de $u^* \circ u$ et donc indépendante du choix de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$.

77. Pour u, endomorphisme de l'espace euclidien E,

$$\mathrm{Ker}\, u^* \circ u = \mathrm{Ker}\, u, \qquad \mathrm{Im}\, u^* \circ u = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp,$$
$$\mathrm{Ker}\, u \circ u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, u \circ u^* = \mathrm{Im}\, u.$$

En particulier, $\mathrm{rg}(u^* \circ u) = \mathrm{rg}(u \circ u^*) = \mathrm{rg}\, u$.

78. Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(E)$. L'endomorphisme $f \circ g$ est auto-adjoint si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

79. On considère le plan P représenté par l'équation cartésienne

$$[ax + by + cz = 0]$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Ce plan est stable par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$A^\top \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

80. Affinités orthogonales
Soit a, un vecteur unitaire de E.
1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme défini par

$$\forall\, x \in E, \quad f_\alpha(x) = x + \alpha\, (a \mid x)\, a$$

est auto-adjoint.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f_α. Interprétation géométrique de f_α ?
3. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Reconnaître $f_\alpha \circ f_\beta$.

81. Soient a et b, deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E. L'endomorphisme u défini par

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = (a \mid x)\, a + (b \mid x)\, b$$

est auto-adjoint. Son noyau est l'orthogonal du plan $\mathrm{Vect}(a,b)$. Les vecteurs $(a+b)$ et $(a-b)$ sont des vecteurs propres respectivement associés à $1 + (a \mid b)$ et à $1 - (a \mid b)$.

82. Soient a et b, deux vecteurs unitaires.
1. L'endomorphisme f défini par

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x - (a \mid x)\, b$$

est auto-adjoint si, et seulement si, a et b sont égaux ou opposés.
2. L'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $(a \mid b) \neq 1$, c'est-à-dire $a \neq b$ et, dans ce cas,

$$\forall\, x \in E, \quad f^{-1}(x) = x + \frac{(a \mid x)}{1 - (a \mid b)}\, b.$$

3. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, a et b sont ne sont pas orthogonaux et dans ce cas,

$$E = (\mathbb{R} \cdot b) \oplus (\mathbb{R} \cdot a)^\perp.$$

83. Si l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors on peut vérifier sur la base canonique **[70]** que l'endomorphisme u défini par

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = \int_0^1 (t+x)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

est auto-adjoint.

84. Un adjoint en dimension infinie
L'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application v définie par

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad v(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme tel que $\|v(f)\| \leqslant \|f\|$ pour tout $f \in E$.

2. Il existe un, et un seul, endomorphisme w de E tel que

$$\forall\, f,g \in E, \quad (\, v(f) \,|\, g\,) = (\, f \,|\, w(g)\,)$$

et cet endomorphisme est défini par

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad w(f)(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

III

Matrices orthogonales

85. Changement de base orthonormée
Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, deux bases de E et $P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

85.1 Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, alors

$$P^\top.P = \big(\,(\,\varepsilon_i \,|\, \varepsilon_j\,)\,\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$$

et la base $\mathscr{C}$ est orthonormée si, et seulement si, $P^\top.P = I_d$.

85.2 ✍ *Une matrice $P \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ est* **orthogonale** *lorsque*

$$P^\top.P = I_d$$

c'est-à-dire lorsque les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire canonique).

85.3 ➙ *Une matrice orthogonale $P \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ est inversible et*

$$P^{-1} = P^\top.$$

En particulier,

$$P^\top.P = P.P^\top = I_d.$$

85.4 Une matrice est orthogonale si, et seulement si, ses lignes forment une base orthonormée de $\mathfrak{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire canonique).

85.5 ✍ *Deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ sont* **orthogonalement semblables** *lorsqu'il existe une matrice orthogonale P telle que*

$$B = P^{-1}.A.P \quad \textit{c'est-à-dire} \quad B = P^\top.A.P.$$

85.6 Deux matrices sont orthogonalement semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme de l'espace euclidien E dans deux bases orthonormées de E.

86.1 ➙ *L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ est un groupe pour $\times$.*

86.2 ✍ *Le groupe, noté $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$, des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ est appelé* **groupe orthogonal** *de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$.*

87. Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.

87.1 ✍ *Une matrice orthogonale est dite* **positive**, *ou* **directe**, *(resp.* **négative**, *ou* **indirecte***) lorsque son déterminant est égal à 1 (resp. à -1).*

87.2 L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $O_d(\mathbb{R})$.

87.3 ✍ *L'ensemble, noté $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}_d^+(\mathbb{R})$, des matrices orthogonales positives, est appelé* **groupe spécial orthogonal** *ou* **groupe des rotations**.

88. Orientation d'un espace de dimension finie
Le choix d'une base de référence $\mathscr{B}$ détermine l'***orientation*** de l'espace E (euclidien ou non).

88.1 L'***orientation canonique*** de $\mathbb{R}^d$ est déterminée par la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

88.2 ✍ *Si la base $\mathscr{B}$ détermine l'orientation de l'espace E, alors une base $\mathscr{C}$ de E est* **directe** *(resp.* **indirecte***) lorsque le déterminant de la matrice de passage*

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$$

est strictement positif (resp. strictement négatif).

88.3 Si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, alors

$$\det_{\mathscr{C}}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_d)}{\det P}$$

quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_d$ de E.

88.4 ➙ *Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées directes de E, alors*

$$\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{C}}.$$

Ce déterminant est noté Det.

Entraînement

89. Questions pour réfléchir

1. Si la matrice de passage P d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{C}$ est orthogonale, les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont-elles orthonormées ?
2. L'application $[M \mapsto M^\top.M]$ est-elle un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}), \times)$ dans lui-même ?
3. L'ensemble $O_d^-(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales indirectes n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.
4. Une matrice dont le déterminant est égal à 1 n'est pas nécessairement une rotation. Donner un contre-exemple.
5. La moitié des matrices orthogonales sont des matrices de rotation.

90. Une matrice orthogonale et triangulaire est en fait une matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à ± 1.

91. Soit $M = (m_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$.

1. $$\forall\, U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \big|(MU)^\top.U\big| \leqslant U^\top.U$$
2. $$\Big|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}\Big| \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

92. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale directe si, et seulement si, a, b et c sont les racines d'un polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $0 \leqslant k \leqslant 4/27$.

93. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det A = 1$ et $\mathrm{tr}(A^\top.A) = 2$.

94. Factorisation d'une matrice de Gram
Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, une base de E et

$$\Gamma = \big(\,(\,e_i \,|\, e_j\,)\,\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d},$$

sa matrice de Gram.
Il existe une base orthonormée $\mathscr{C} = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de E telle que la matrice de passage

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$$

soit une matrice triangulaire supérieure. On a alors

$$\Gamma = P^\top.P.$$

95. On suppose que deux produits scalaires $(\,\cdot \,|\, \cdot\,)$ et $\langle\,\cdot \,|\, \cdot\,\rangle$ sont définis sur l'espace E.
Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, deux bases de E et P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

95.1 Les deux matrices de Gram

$$\Gamma_{\mathscr{B}} = \big(\,\langle\, e_i \,|\, e_j\,\rangle\,\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathscr{C}} = \big(\,\langle\, \varepsilon_i \,|\, \varepsilon_j\,\rangle\,\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$$

sont liées par la relation

$$\Gamma_{\mathscr{C}} = P^\top.\Gamma_{\mathscr{B}}.P.$$

95.2 Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées de E pour $(\cdot|\cdot)$, alors les matrices $\Gamma_{\mathscr{B}}$ et $\Gamma_{\mathscr{C}}$ sont semblables.
95.3 Si de plus la matrice $\Gamma_{\mathscr{C}}$ est diagonale, alors la base $\mathscr{C}$ est orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$ et orthogonale pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

96. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, deux bases orthogonales de E et P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

1. Il existe deux bases orthonormées $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{C}_0$ telles que les matrices de passage

$$Q_1 = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}_0) \quad \text{et} \quad Q_2 = \mathfrak{Mat}(\mathscr{C} \to \mathscr{C}_0)$$

soient diagonales.

2. La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{C}_0$ est égale à

$$P_0 = Q_2 P Q_1^{-1}.$$

Simplifier les produits $P_0^\top.P_0$ et $P_0.P_0^\top$.

IV

Isométries

97. ✍ *Un endomorphisme u de E est une* **isométrie vectorielle** *si, et seulement si,*

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

*On parle aussi d'***automorphisme orthogonal**.

98. ➙ **Conservation du produit scalaire**
Un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\,(x,y) \in E\times E, \qquad (\,u(x)\,|\,u(y)\,) = (\,x\,|\,y\,).$$

99. ➙ **Adjoint d'une isométrie**
Un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, il est inversible et

$$u^* = u^{-1}.$$

100. **Isométries et sous-espaces stables**
100.1 ➙ *Si V est un sous-espace vectoriel de E stable par une isométrie u, alors l'endomorphisme u_V induit par restriction de u à V est une isométrie de V.*
100.2 Si $u \in \mathrm{GL}(E)$ et si V est un sous-espace vectoriel stable par u, alors V est stable par u^{-1}. →[**2.47**.2]
100.3 ➙ *Si V est un sous-espace vectoriel stable par une isométrie u, alors $V^\perp$ est stable par u.*

Groupes d'isométries

101. ➙ *L'ensemble des isométries vectorielles de E est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E),\circ)$.*

102. ✍ *Le groupe des isométries vectorielles, dit* **groupe orthogonal de** *E, est noté $O(E)$.*

103. ➙ *Le déterminant d'une isométrie est égal à ± 1.*

104. ✍ *Une isométrie de déterminant* 1 *est appelée* **isométrie directe** *ou* **rotation (vectorielle)**.

105. ➙ *L'ensemble des rotations de E est un sous-groupe de $O(E)$.*

106. ✍ *Le groupe $\mathrm{SO}(E)$ des rotations de E est appelé* **groupe spécial orthogonal**.

107. ✍ *Une isométrie de déterminant -1 est appelée* **isométrie indirecte**.

Représentation matricielle

108. ➙ **Action sur les bases orthonormées**
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
108.1 *Si u est une isométrie, alors l'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E.*
108.2 *Si l'image par u d'une base orthonormée de E est une famille orthonormée de E, alors u est une isométrie vectorielle.*
108.3 *Si u est une rotation vectorielle, alors l'image par u d'une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est une base orthonormée de E de même orientation que $\mathscr{B}$.*
108.4 *Si l'image par u d'une base orthonormée directe de E est une base orthonormée directe de E, alors u est une rotation vectorielle.*

109. **Caractérisations matricielles**
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
109.1 ➙ *Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, la matrice $P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale :*

$$P^\top.P = P.P^\top = I_d.$$

109.2 L'endomorphisme u est une rotation si, et seulement si, sa matrice relative à une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est une matrice orthogonale positive.

$$u \in \mathrm{SO}(E) \iff \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

109.3 Soient $\mathscr{B}$, une base (quelconque) de E et Γ, la matrice de Gram [**8**] de cette base. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, la matrice

$$P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

vérifie la relation : $P^\top.\Gamma.P = \Gamma$.

IV.1 Exemples géométriques

Symétries orthogonales

110. Les isométries les plus simples (par leur structure géométrique) sont les symétries orthogonales.
110.1 Un endomorphisme $s \in \mathrm{L}(E)$ est une symétrie : $s^2 = \mathrm{I}_E$ si, et seulement si,

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E).$$

Dans ce cas,

$$\forall\, x \in E, \quad x = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2}$$

et le déterminant de s est égal à $(-1)^\delta$ où $\delta = \dim \mathrm{Ker}(s+\mathrm{I}_E)$.
110.2 Si une symétrie $s \in \mathrm{L}(E)$ est une isométrie, alors ses sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{I}_E)$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s+\mathrm{I}_E)$ sont orthogonaux.
110.3 ✍ *Un endomorphisme s est une* **symétrie orthogonale** *lorsque s est une symétrie :*

$$s^2 = \mathrm{I}_E$$

et que ses deux sous-espaces propres :

$$E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) \quad \textit{et} \quad E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E)$$

sont orthogonaux.
110.4 Si s est une symétrie orthogonale, alors

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E).$$

En particulier,

$$\begin{cases} [\mathrm{Ker}(s-\mathrm{I}_E)]^\perp = \mathrm{Ker}(s+\mathrm{I}_E) \\ [\mathrm{Ker}(s+\mathrm{I}_E)]^\perp = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{I}_E). \end{cases}$$

111. ➙ **Caractérisations des symétries orthogonales**
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *L'endomorphisme u est une symétrie orthogonale.*
2. *$u^2 = \mathrm{I}_E$ et $u \in \mathcal{S}(E)$.*
3. *$u \in \mathcal{S}(E) \cap O(E)$.*
4. *$u^2 = \mathrm{I}_E$ et $u \in O(E)$.*

112. ➙ *Soient $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E et u, un endomorphisme de E.*
L'endomorphisme u est une symétrie orthogonale si, et seulement si, la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique et orthogonale.

113. ➙ *Soient s et p, deux endomorphismes de E qui vérifient la relation : $s = 2p - \mathrm{I}_E$. Alors s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, p est un projecteur orthogonal.*

Réflexions

114. Les symétries orthogonales les plus simples sont celles pour lesquelles le sous-espace ***fixe***

$$\{x \in E \,:\, s(x) = x\}$$

est maximal.

115. ✍ *Un endomorphisme s de E est une* **réflexion** *lorsque s est une symétrie orthogonale et que le sous-espace propre*

$$E_1 = \operatorname{Ker}(s - I_E)$$

est un hyperplan.

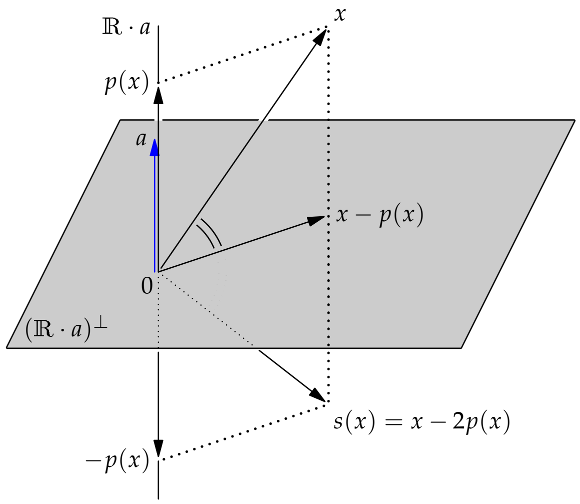
116. ➙ *Le déterminant d'une réflexion est égal à -1.*

117. Projection sur $\mathbb{R} \cdot a$ et réflexion d'hyperplan $(\mathbb{R} \cdot a)^\perp$

117.1 Pour tout vecteur $a \in E$ non nul, l'application $s : E \to E$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad s(x) = x - 2\frac{(\,a\,|\,x\,)}{\|a\|^2}\,a$$

est une réflexion qui fixe l'hyperplan $a^\perp$.



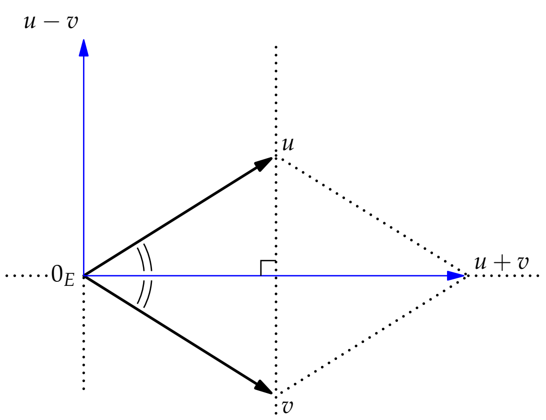
117.2 Si le vecteur a est représenté par $A \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}_0$, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(s) = I_n - 2\frac{A.A^\top}{A^\top.A}.$$

118. ➙ *Pour tout hyperplan H de E, il existe une, et une seule, réflexion s telle que $\operatorname{Ker}(s - I_E) = H$.*

119. ✍ *Soit H, un hyperplan de E. La* **réflexion d'hyperplan** *H est l'unique réflexion s telle que*

$$\operatorname{Ker}(s - I_E) = H.$$



120. Réflexion échangeant deux vecteurs

120.1 Soit s, une réflexion telle que $s(u) = v$. Alors $s(v) = u$ et $s(u - v) = -(u - v)$.

120.2 ➙ *Étant donnés deux vecteurs u et v, distincts et de même norme, il existe une, et une seule, réflexion s telle que*

$$s(u) = v \quad \text{et} \quad s(v) = u.$$

IV.2 Isométries planes

121.1 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

sont orthogonales. De plus, $\det R(\theta) = 1$ et $\det S(\theta) = -1$.

121.2 Pour toute matrice P de $O_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\theta)$ ou $P = S(\theta)$.

122. Rotations

122.1 Les matrices $R(\alpha)$ et $R(\beta)$ sont semblables si, et seulement si, $\alpha = \pm\beta\,[2\pi]$.

122.2 Quels que soient les réels α et β,

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta).$$

122.3 ➙ *L'application $[\theta \mapsto R(\theta)]$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$. Ce morphisme est surjectif et son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.*

122.4 ➙ *Le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif.*

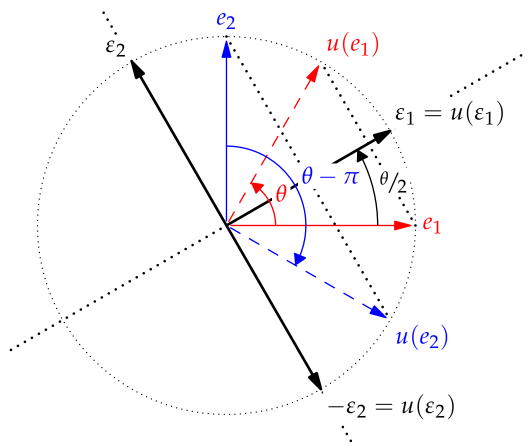
122.5 ➙ *L'application*

$$\left[e^{i\theta} \mapsto R(\theta)\right]$$

est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{U}, \times)$ sur le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$.

123. Réflexions

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $S(\theta)$ est une matrice de réflexion.



123.1 Si la matrice $S(\theta)$ représente l'isométrie u dans la base orthonormée (e_1, e_2), alors $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont les images respectives de e_1 et de e_2 par les rotations d'angles θ et $(\theta - \pi)$.

123.2 Les sous-espaces propres associés à 1 et à -1 sont les droites dirigées respectivement par

$$\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad \text{et par} \quad \begin{pmatrix} -\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix}.$$

124. Relations de commutation

(1) $\quad S(\alpha)S(\beta) = R(\alpha - \beta)$

(2) $\quad S(\beta)R(\alpha) = S(\beta - \alpha)$

(3) $\quad R(\alpha)S(\beta) = S(\alpha + \beta)$

Angles orientés

125. Définition algébrique
Soit E, un plan euclidien.
125.1 ✍ *Deux couples de vecteurs* non nuls (u_1, v_1) *et* (u_2, v_2) *sont dits équivalents lorsqu'il existe une rotation* $r \in \mathrm{SO}(E)$ *telle que*

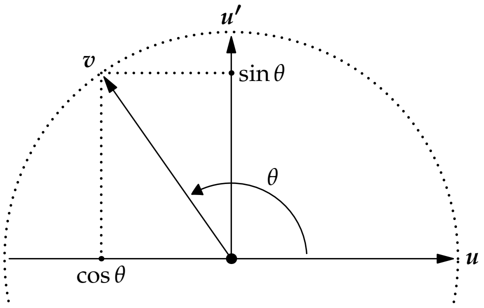
$$r\Big(\frac{u_1}{\|u_1\|}\Big) = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad et \quad r\Big(\frac{u_2}{\|u_2\|}\Big) = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Cette propriété est notée $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$.
125.2 La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
125.3 ✍ *Les* ***angles orientés*** *sont les classes d'équivalence de la relation* $\sim$.

126. Point de vue géométrique
Soient E, un plan euclidien, et u, un vecteur unitaire.
126.1 Il existe deux bases orthonormées de E dont le premier vecteur est u et une seule base orthonormée directe $\mathscr{B}_u = (u, u')$ de E.
126.2 Pour tout vecteur unitaire $v \in E$, il existe un, et un seul, réel $-\pi < \theta \leqslant \pi$ tel que

$$v = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot u'.$$

La seule rotation $r \in \mathrm{SO}(E)$ telle que $r(u) = v$ est la rotation de matrice $R(\theta)$ dans la base $\mathscr{B}_u$.



126.3 ✍ *Le nombre réel* $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ *est* **la mesure principale de l'angle orienté** (u, v).
Tout nombre réel $\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi}$ *est* **une mesure de l'angle orienté** (u, v).
126.4 On devrait parler de la *rotation d'angle de mesure* θ et non pas de la *rotation d'angle* θ. La lourdeur de l'expression me convainc qu'il est juste et bon d'employer cette synecdoque (particularisante).

127. Angles non orientés
Soient u et v, deux vecteurs unitaires du plan euclidien E.
127.1 Soit $r \in \mathrm{SO}(E)$, la rotation telle que $r(u) = v$. Alors $r^{-1}(v) = u$ et les mesures principales des angles (u, v) et (v, u) sont opposées.
127.2 Il existe un, et un seul, réel $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ tel que la mesure principale de l'angle (u, v) soit égale à $\pm\theta$.
Ce réel θ est la mesure principale de l'***angle non orienté*** (u, v).
127.3 ✍ *Dans un espace euclidien de dimension quelconque, deux vecteurs* non nuls *u et v définissent un* **angle non orienté** *et la* **mesure principale** *de cet angle non orienté est le réel* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ *défini par*

$$\cos\theta = \frac{(\,u \mid v\,)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Classifications des isométries vectorielles du plan

128. ➙ *Soit u, une isométrie vectorielle du plan euclidien E.*
128.1 *Si u est une rotation, alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = R(\pm\theta)$$

pour toute *base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* E.
128.2 *Sinon, pour toute base orthonormée* $\mathscr{B}$ *de* E, *il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = S(\theta)$ *et il existe une base orthonormée* $\mathscr{B}_0$ *de* E *telle que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Diag}(1, -1).$$

129. Selon la dimension du sous-espace fixe
On peut classer les isométries en fonction de la dimension du sous-espace fixe $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E)$.
- Si $\dim F = 2$, alors $u = \mathrm{I}_E$.
- Si $\dim F = 1$, alors u est une réflexion.
- Si $\dim F = 0$, alors u est une rotation d'angle $0 < \theta \leqslant \pi$ (avec le cas particulier $\theta = \pi$ pour lequel $u = -\mathrm{I}_E$).

130. Selon les sous-espaces propres
On peut classer les isométries planes en fonction de leurs sous-espaces propres.
- Un seul sous-espace propre : I_2 et $-I_2$.
- Deux droites propres : les réflexions, représentées (dans une base orthonormée convenable) par la matrice $\mathrm{Diag}(1, -1)$.
- Aucun sous-espace propre : les rotations, représentées par $R(\pm\theta)$ pour un angle $0 < \theta < \pi$.

Entraînement

131. Questions pour réfléchir
1.a L'endomorphisme I_E est une rotation.
1.b L'endomorphisme $-\mathrm{I}_E$ est-il une rotation ?
2. Si $\det u = 1$, l'endomorphisme u est-il une rotation ?
3. Si $\dim E = 3$, quelles symétries orthogonales sont aussi des rotations ?
4. Une réflexion peut-elle être une rotation ?
5. L'ensemble des isométries indirectes n'est pas un sous-groupe du groupe orthogonal.
6. Condition pour que deux rotations du plan *affine* commutent.
7. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 est-il stable par produit ?
8. *Suite de* **[121]** – Comparer $S(\alpha)S(\beta)$ et $S(\beta)S(\alpha)$.
9. *Suite de* **[124]** – Simplifier l'expression $P^\top.S(\theta)P$ en prenant $P = R(\alpha)$. Étudier le cas $\alpha = -\theta/2$. Interpréter géométriquement.
10. Condition pour que deux matrices orthogonales appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ commutent ?
11. Pour toute matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$,

$$P^\top.R(\theta)P = R\big((\det P)\theta\big).$$

Interpréter géométriquement.

132. Soit $f \in O(E)$.
1. Pour tout sous-espace F de E, l'orthogonal du sous-espace $f_*(F)$ est le sous-espace $f_*(F^\perp)$.
2. Si $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$, alors $f_*(F^\perp) = F^\perp$.

133. Factorisation d'une isométrie
Soit E, un espace euclidien.
133.1 Si f est une isométrie telle que le sous-espace fixe

$$F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$$

soit un hyperplan de E, alors f est la réflexion d'hyperplan H.
133.2 Soit $f \in O(E)$. On note r, la codimension du sous-espace fixe par f :

$$r = \dim E - \dim F \quad \text{où} \quad F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E).$$

1. Que dire de f si $r = 0$? si $r = 1$?
2. On suppose que $1 \leqslant r \leqslant \dim E$.
2.a Il existe deux vecteurs unitaires distincts u et v, orthogonaux au sous-espace F et tels que $f(u) = v$.

2.b En notant s, la réflexion qui échange les vecteurs u et v, la composée $s \circ f$ est une isométrie de E et

$$F \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot (u - v) \subset \operatorname{Ker}(s \circ f - I_E).$$

133.3 ➙ *Le groupe orthogonal $O(E)$ est engendré par les réflexions : pour toute isométrie $f \in O(E)$, il existe un entier*

$$1 \leqslant n \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{Ker}(f - I_E)$$

et n réflexions s_1, ..., s_n telles que

$$f = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_n.$$

133.4 En particulier [**121**], toute rotation de $\mathbb{R}^2$ est la composée de deux réflexions : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie

$$S(\alpha)S(\beta) = R(\theta)$$

si, et seulement si, $\alpha - \beta = \theta$.

133.5 De même, toute rotation de $\mathbb{R}^3$ est la composée de deux réflexions.

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

134. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\, P \mid Q \,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = X^n(1 - X)^n \quad \text{et} \quad L_n = P_n^{(n)}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme L_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à $(-1)^n {}^{(2n)!}/_{n!}$.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2.a Si $P(0) = P(1) = 0$, alors $(\, P' \mid Q \,) = -(\, P \mid Q' \,)$.
2.b Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\, L_n \mid Q \,) = (-1)^n (\, P_n \mid Q^{(n)} \,)$.
3. La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

135. Matrices de Gram
Soit $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$, une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

135.1 Si P est la matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ relative à une base orthonormée, alors la matrice de Gram [**8**] vérifie :

$$G(u_1, \dots, u_p) = P^\top.P.$$

135.2 Si la matrice colonne $X = (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifie $GX = 0$, alors $X^\top.G.X = 0$ et

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E.$$

135.3 ➙ *La matrice de Gram $G(u_1, \dots, u_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.*

135.4 Projection orthogonale
On note $G = G(u_1, \dots, u_p)$. Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur le sous-espace $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le vecteur

$$y = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot u_k \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (\, x \mid e_1 \,) \\ \vdots \\ (\, x \mid e_p \,) \end{pmatrix}.$$

136. Distance à un hyperplan
On peut utiliser les matrices de Gram pour calculer la distance d'un point à un hyperplan en suivant la démarche de l'algorithme de Gram–Schmidt mais sans expliciter de base orthogonale.

136.1 Soit $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$, une famille libre. Le sous-espace

$$F_p = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

est un hyperplan du sous-espace

$$F_{p+1} = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}).$$

1. Si u_{p+1} est orthogonal à F_p, calculer la distance d'un vecteur $x \in F_{p+1}$ à F_p.
2. Si u_{p+1} n'est pas orthogonal à F_p, comment utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour calculer la distance d'un vecteur $x \in F_{p+1}$ à F_p ?

136.2 On note

$$\gamma_p = \det G(u_1, \dots, u_p) \quad \text{et} \quad \gamma_{p+1} = \det G(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}),$$

les déterminants de deux matrices de Gram et on considère le vecteur

$$v_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

3.a On peut choisir les scalaires λ_1, ..., λ_p de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad (\, u_k \mid v_{p+1} \,) = 0.$$

3.b L'opération

$$C_{p+1} \leftarrow C_{p+1} - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p)$$

sur la matrice $G(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ montre que

$$\gamma_{p+1} = \gamma_p \; (\, v_{p+1} \mid u_{p+1} \,) = \gamma_p \, \|v_{p+1}\|^2.$$

4. La distance du vecteur $x = u_{p+1}$ au sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est donnée par

$$\gamma_{p+1} = \gamma_p \cdot \big[\, \mathrm{d}(x, F) \big]^2.$$

137.1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue et $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, une famille de réels deux à deux distincts.
Il existe une, et une seule, famille réelle $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k).$$

(On peut appliquer le théorème de Riesz [**64.3**] aussi bien que la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange.)

137.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et un seul, tel que

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} P_n(k) Q(k).$$

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie la relation suivante ?

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} P(k) Q(k) = \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t$$

138. On suppose que $\mathscr{L}_c^2([0,1])$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ est réduit à $\{0\}$.

139. Inégalité de Bessel

139.1 Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, alors

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} (\, e_k \,|\, x\,)^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité si, et seulement si, x appartient au sous-espace engendré par $(e_1, \dots, e_n)$. →[**141.2**]

139.2 ➞ *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Alors, pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum (\, e_k \,|\, x\,)^2$ converge et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\, e_k \,|\, x\,)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

139.3 Le cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel est l'objet du théorème de Parseval [**141.4**].

140. ✍ *Une famille de vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est* **totale** *si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs appartenant au sous-espace $F = \mathrm{Vect}(e_n,\ n \in \mathbb{N})$ qui converge vers x.*

141. Théorème de Parseval

On considère un sous-espace F de E muni d'une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n),$$

de telle sorte que le projeté orthogonal de x sur F_n est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\, e_k \,|\, x\,) \cdot e_k.$$

141.1 Un vecteur x appartient au sous-espace F_n si, et seulement si,

$$\forall\, k > n, \qquad (\, e_k \,|\, x\,) = 0.$$

141.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (\, e_k \,|\, x\,)^2 = \big\|x - p_n(x)\big\|^2$$

et en particulier, la suite de terme général $\|x - p_n(x)\|$ est décroissante.

141.3 Pour tout vecteur $y \in F$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_{n_0}$ et

$$\|x-y\|^2 \geqslant \big\|x - p_{n_0}(x)\big\|^2 \geqslant \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} (\, e_k \,|\, x\,)^2.$$

141.4 ➞ *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée de E et F, le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Alors*

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, e_n \,|\, x\,)^2$$

si, et seulement si, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale [**140**] *et, dans ce cas, la suite des projetés orthogonaux de x*

$$\sum_{k=0}^{n} (\, e_k \,|\, x\,) \cdot e_k$$

converge vers x.

141.5 ▷ **Forme polarisée**

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée totale de E. Alors

$$(\, x \,|\, y\,) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, x \,|\, e_n\,)\ (\, e_n \,|\, y\,)$$

quels que soient x et y dans E.

141.6 Soit F, un sous-espace vectoriel de E. Si, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = 0,$$

alors $F^{\perp} = \{0\}$.

142. Approximation par des polynômes orthogonaux

Soit K, une fonction continue, strictement positive et intégrable sur l'intervalle borné $]a,b[$.

142.1 L'application définie par

$$(\, f \,|\, g\,) = \int_a^b f(t)g(t)K(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

142.2 Comme

$$\forall\, f,g \in E, \quad \|f-g\| \leqslant \sqrt{\int_a^b K(x)\,\mathrm{d}x}\,\|f-g\|_\infty$$

le sous-espace F des fonctions polynomiales est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

142.3 La suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de F est une famille totale et

$$\forall\, f \in E, \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, P_n \,|\, f\,)\ P_n$$

au sens où

$$\Big\|f - \sum_{n=0}^{N} (\, P_n \,|\, f\,)\ P_n\Big\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

142.4 Exemples

Les ***polynômes de Legendre*** sont les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associés au noyau défini par

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad K(x) = 1$$

et les ***polynômes de Tchebychev*** sont associés au noyau défini par →[**143**]

$$\forall\, x \in \,]-1,1[\,, \quad K(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

143. Polynômes de Tchebychev

Soient E, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et F, le sous-espace constitué des fonctions polynomiales.

143.1 On définit un produit scalaire sur E en posant

$$(\, f \,|\, g\,) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

143.2 Toute fonction continue f est limite (pour la norme associée à ce produit scalaire) d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à F.

143.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0.$$

143.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes dans $[-1,1]$.

143.5 Considérée comme une famille de vecteurs de F, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

143.6 D'après le Théorème de Parseval [**141.4**],

$$\forall\, f \in E, \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\, T_n \,|\, f\,)}{\|T_n\|^2}\ T_n$$

144. Contre-exemple au théorème de Riesz
L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

On considère la forme linéaire $\varphi = [P \mapsto P(0)]$.

1.a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)\,dt.$$

1.b Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q_\omega \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$), alors $\varphi(P) = (P \mid Q_\omega)$ pour tout $P \in E$.

2. S'il existe $Q_\omega \in E$ tel que $\varphi(P) = (P \mid Q_\omega)$ pour tout $P \in E$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, P \in E, \quad |P(0)| \leqslant K\|P\|.$$

3.a Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$

3.b Quelle que soit cette suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

4. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans E pour $\|\cdot\|$? Et pour $\|\cdot\|_\infty$?

145. Factorisation QR et matrices de Householder
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique : la base canonique

$$\mathscr{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$$

est une base orthonormée.

145.1 Existence de la décomposition
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une base $\mathscr{B}$ telle que A soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.
2. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ telle que la matrice de passage R_0 de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_0$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs.
3. La matrice $Q_0 = R_0 A$, matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}_0$, est orthogonale.
4. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.

145.2 ✍ *Pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ non nul, la* **matrice de Householder** $H(a)$ *associée à a est définie par*

$$H(a) = I_n - 2\frac{A.A^\top}{A^\top.A}$$

où la matrice colonne A représente le vecteur a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. →**[117.2]**
Par convention, la matrice de Householder associée au vecteur nul est la matrice I_n.

145.3 Pratique de la décomposition
On va élaborer un algorithme qui produit une factorisation QR d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donnée en précisant celui qui est mis en œuvre au **[133]**.

5. Si $v_1 \in \mathbb{R}^n$ n'est pas colinéaire et de même sens que e_1, alors il existe **[120.2]** une réflexion h_1 et un scalaire $\lambda_1 > 0$ tels que

$$h_1(v_1) = \lambda_1 e_1.$$

6. Pour $1 \leqslant j < n$, si le vecteur

$$w_j = \left(x_1, \dots, x_{j-1}, \sqrt{x_j^2 + \cdots + x_n^2}, 0, \dots, 0\right)$$

est distinct du vecteur

$$v_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n),$$

alors il existe une réflexion h_j telle que

$$h_j(e_1) = e_1, \dots, h_j(e_{j-1}) = e_{j-1}, \quad h_j(v_j) = w_j.$$

7. Il existe $(n-1)$ matrices de Householder $H_1, \dots, H_{n-1}$ telles que la matrice

$$R = H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A$$

soit triangulaire supérieure, que la matrice

$$Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$$

soit orthogonale et que $A = QR$.