Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+e^t}\,dt.$$

1❧ *Il existe une constante* $K > 0$ *telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K \int_0^1 t^n\,dt$$

Peut-on en déduire la nature de la série $\sum u_n$ *?*

2❧ *La suite de terme général* $(n+1)u_n$ *tend vers* $e/1+e$.

3❧ *La série* $\sum(-1)^n u_n$ *est semi-convergente.*

4❧ *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur* $x \in \mathbb{R}$ *pour que la série* $\sum u_n x^n$ *converge.*

1❧ La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{e^t}{1+e^t}\right]$$

est continue sur le segment $[0,1]$ et donc bornée : il existe donc un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{t^n e^t}{1+e^t} \leqslant K t^n.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K \int_0^1 t^n\,dt = \frac{K}{n+1}$$

donc $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

❧ Comme la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, on ne peut pas appliquer le théorème de comparaison. *On ne peut donc pas* déduire la nature de la série $\sum u_n$ de l'encadrement précédent.

2❧ On intègre par parties :

$$\begin{aligned}(n+1)u_n &= \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt \\ &= \Big[t^{n+1} f(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt \\ &= \frac{e}{1+e} - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Comme f' est continue sur le segment $[0,1]$, le raisonnement de la question précédente montre que

$$(n+1)u_n = \frac{e}{1+e} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{1+e}.$$

On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{n}$$

et comme $\sum 1/n$ est une série divergente de terme général positif, on peut *cette fois* appliquer le théorème de comparaison et en déduire que la série $\sum u_n$ est *divergente*.

3❧ Comme $|(-1)^n u_n| = u_n$, on a déjà démontré que la série $\sum(-1)^n u_n$ n'était pas absolument convergente.

On a vérifié plus haut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendait vers 0. Enfin, comme la fonction f est positive,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant t^{n+1} f(t) \leqslant t^n f(t)$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

par positivité de l'intégrale. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ est bien convergente (critère spécial des séries alternées).

4 On sait que la série $\sum u_n x^n$ converge pour $x = -1$ et diverge pour $x = 1$.

Pour $|x| < 1$, on a $u_n x^n = o(x^n)$ (puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0). Par comparaison avec la série géométrique $\sum x^n$, on en déduit que la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente et donc convergente.

Enfin, pour $|x| > 1$,

$$u_n x^n \sim \frac{e}{1+e} \cdot \frac{x^n}{n}$$

et par croissances comparées $u_n x^n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n x^n$ est grossièrement divergente.

Ainsi, la série $\sum u_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $-1 \leqslant x < 1$.