> *Résoudre l'équation*
> $$(z^2+1)^n = (z-i)^{2n}$$
> *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$.

❧ **Première approche** — Il s'agit de résoudre l'équation polynomiale

$$(z^2+1)^n - (z-i)^{2n} = 0.$$

On peut réécrire cette équation avec la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2k} - \sum_{\ell=0}^{2n} \binom{2n}{\ell} z^{\ell}(-i)^{2n-\ell} = 0$$

ce qui donne en particulier (les termes de degré strictement inférieur à $(2n-1)$ sont omis)

$$\left(z^{2n}+\cdots\right) - \left(z^{2n} - 2niz^{2n-1} + \cdots\right) = 0$$

donc

$$2niz^{2n-1} + \cdots = 0.$$

Il s'agit donc de résoudre une équation polynomiale de degré $(2n-1)$: on trouvera donc *au plus* $(2n-1)$ racines complexes distinctes.

Même en explicitant tous les termes de l'équation, on ne peut pas trouver les racines de cette réécriture.

❧ **Deuxième approche** — Factorisons ! Comme $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, notre équation devient

$$(z-i)^n(z+i)^n = (z-i)^{2n}.$$

Il est ainsi clair que i est une solution de cette équation !

❧ Cherchons maintenant les solutions distinctes de i : pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, notre équation peut se simplifier et devient

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Par conséquent, le quotient $\frac{z-i}{z+i}$ est une racine n-ième de l'unité : il existe un entier $0 \leqslant k < n$ tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = \zeta_k \overset{\text{déf.}}{=} e^{2ik\pi/n}$$

et notre équation devient

$$(\zeta_k - 1)z = i(\zeta_k+1).$$

► Pour $k=0$, on a $(\zeta_k - 1) = 0$ et $i(\zeta_k+1) = 2i \neq 0$: on ne trouvera donc pas de solution dans ce cas.

► Pour $1 \leqslant k < n$, on a $(\zeta_k - 1) \neq 1$ et dans ce cas, on aboutit à

$$z = \frac{i(\zeta_k+1)}{\zeta_k - 1}.$$

❧ La discussion précédente nous a donné *au plus* $(n-1)$ solutions complexes :

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \qquad z_k = \frac{i(\zeta_k+1)}{\zeta_k-1}.$$

Comme $\zeta_k + 1 \neq \zeta_k - 1$, chaque z_k est distinct de i et on vérifie sans peine que

$$\frac{z_k+i}{z_k-i} = \zeta_k.$$

Comme les ζ_k sont deux à deux distincts, on en déduit que les z_k sont deux à deux distincts. D'autre part, on déduit de cette dernière relation que $(z_k+1)^n = (z_k-i)^n$ et donc que $(z_k^2+1)^n = (z_k-i)^{2n}$, ce qui prouve que chaque z_k est bien une solution de notre équation.

❧ En conclusion : l'équation $(z^2 + 1)^n = (z - i)^{2n}$ admet exactement n solutions complexes distinctes : d'une part, i (qui compte en fait pour n solutions) et d'autre part les z_k définis plus haut pour $1 \leqslant k < n$.

✍ *La résolution de ce genre d'équations peut facilement conduire à diviser par zéro (ce serait mal,* très *mal). Il est donc plus prudent de raisonner par analyse et synthèse :*

— *dans un premier temps, on suppose que $z \in \mathbb{C}$ est une solution et on trouve les expressions* possibles *pour z ;*

— *dans un second temps, on vérifie que chacune des expressions trouvées est* effectivement *une solution de l'équation. (Éventuellement, on peut constater à cette occasion que certaines des expressions trouvées* ne sont pas *des solutions — pas de préjugé, la conclusion doit découler d'un calcul.)*

Il serait vraiment hasardeux de raisonner par équivalence.