# Intégrales fonctions d'un paramètre

**1.** Étant donnée une fonction $f$ des variables $x \in \Omega$ et $t \in I$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ soit intégrable sur $I$, on étudie les propriétés de la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

et en particulier sa régularité (continuité, dérivabilité).

**2.** La parité, la monotonie, la convexité et la continuité de $F$ peuvent parfois se déduire très simplement de $f$.
**2.1** Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est croissante (resp. décroissante), alors la fonction $F$ est croissante (resp. décroissante).
**2.2** Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est convexe (resp. concave), alors la fonction $F$ est convexe (resp. concave).
**2.3** S'il existe une fonction $g$, intégrable sur $I$, et une constante $K$ telles que

$$\forall\,(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times I, \quad \big|f(x,t) - f(y,t)\big| \leqslant Kg(t)|x-y|,$$

alors $F$ est lipschitzienne sur $\Omega$.

**3. Exemples**
**3.1** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]-1,+\infty[$.
**3.2** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]1,+\infty[$.
**3.3** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et positive sur $]0,+\infty[$.
**3.4** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $a > 0$, la fonction $F$ est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$.
**3.5** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

est impaire et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

## I

## Rappels sur la continuité

**4.** ✍ *Une fonction est* **continue sur un intervalle** *(resp.* **sur un ouvert)** *lorsqu'elle est continue en chaque point de cet intervalle (resp. de cet ouvert).*

### I.1 Caractérisations séquentielles

**5.** On considère une fonction $\varphi$ définie sur $\Omega$, à valeurs dans un espace $E$.
**5.1** ➙ *La fonction $\varphi$ est continue en $x_0 \in \Omega$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega$ qui converge vers $x_0$, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
**5.2** Par définition, une fonction ne peut être continue qu'en un point $x_0$ de son ensemble de définition.
En revanche, on peut étudier l'existence d'une limite pour $\varphi$ au voisinage d'un point $x_0$ qui n'appartient pas à son ensemble de définition $\Omega$.
**5.3** ➙ *La fonction $\varphi$ tend vers une limite $\ell$ (appartenant à $E$ ou infinie) au voisinage de $x_0$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega$ qui tend vers $x_0$, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$.*

### I.2 Du local au global

**6. Topologie locale de $\mathbb{R}^d$**
**6.1** ➙ *Soit $\Omega$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un segment $[A,B]$ tel que*

$$x_0 \in [A,B] \subset \Omega.$$

**6.2** ➙ *Soit $\Omega$, un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x_0 \in I$, il existe une boule fermée $B_r$ de rayon $r > 0$ telle que*

$$x_0 \in B_r \subset \Omega.$$

**7. Méthodes**
La définition **[4]** permet de parvenir à une *conclusion globale* par une *démonstration locale*.
**7.1** Une fonction est continue sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est continue sur tout segment $[A,B] \subset \Omega$.
**7.2** Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si, et seulement si, elle est continue sur toute boule fermée contenue dans $\Omega$.

**8. Exemples de mise en œuvre**
**8.1** Une fonction est continue sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, pour tout $B > 0$, elle est continue sur le segment $[0,B]$.
**8.2** Une fonction est continue sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, quels que soient $0 < A < B$, elle est continue sur $[A,B]$.
**8.3** Une fonction est continue sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[A,+\infty[$.
**8.4** Une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quel que soit $A > 0$, elle est continue sur $[-A,A]$.
**8.5** Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elle est continue sur tout pavé $[\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta]$ contenu dans $\Omega$.

**9.** Comme les fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ sont définies de manière analogue aux fonctions continues, on peut utiliser des méthodes analogues pour prouver qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné ou de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert donné.

**Entraînement**

**10. Questions pour réfléchir**

1. *Suite de* [**1**] –

1.a Condition suffisante pour que $F$ soit bornée sur $\Omega$ ?

1.b Si la fonction $f$ est bornée sur $\Omega \times I$, la fonction $F$ est-elle bornée sur $\Omega$ ?

2. *Suite de* [**3.4**] – La fonction $F$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $\pi/2$ au voisinage de 0.

3. *Suite de* [**3.1**] – La fonction $F$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de $-1$. →[**3.128**]

4. *Suite de* [**3.2**] – La fonction $F$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 1. →[**3.128**]

5. *Suite de* [**3.3**] – La fonction $F$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0. →[**3.128**]

6. *Suite de* [**5.1**] – Que dire de la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ?

7. *Suite de* [**5.3**] – Que conclure si $\varphi$ admet une limite en un point $x_0 \in \Omega$ ? Cette limite peut-elle être infinie ?

8. *Suite de* [**5.3**] – On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega$ qui tend vers $x_0$, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction $\varphi$ admet une limite au voisinage de $x_0$.

## II

## Intégrale fonction des bornes

**11.** Soit $f$, une fonction intégrable sur l'intervalle ouvert $I$. Pour tout $x_0 \in I$, on considère la fonction $F_{x_0}$ définie par

$$\forall\, x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**11.1** Si $f$ est bornée sur $I$, alors $F_{x_0}$ est lipschitzienne sur $I$.

**11.2** La fonction $F_{x_0}$ est continue sur $I$.

**11.3** La fonction $F_{x_0}$ est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in I$ et

$$(F_{x_0})'_g(x) = f(x^-), \quad (F_{x_0})'_d(x) = f(x^+).$$

**11.4 ➙ Théorème fondamental**

*Soient $f$, une fonction continue sur $I$ et $x_0 \in I$. La fonction*

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

*est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et est une primitive de $f$.*

**11.5** Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$ ; $\varphi$ et $\psi$, de classe $\mathscr{C}^1$ de $J$ dans $I$. La fonction

$$G = \left[u \mapsto \int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J$ et

$$\forall\, u \in J, \quad G'(u) = f\big(\psi(u)\big)\psi'(u) - f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u).$$

**12.** ➙ *Soit $f$, une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est convergente, alors la fonction $G$ définie par*

$$\forall\, x \geqslant a, \quad G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

*est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $G' = -f$.*

**Entraînement**

**13. Questions pour réfléchir**

1. Étudier le signe et les variations de

$$G(x) = \int_x^{x^2} \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer un équivalent de $G(x)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

2. *Suite de* [**11**] – Si $F_{x_0}$ est dérivable sur $I$, sa dérivée est-elle égale à $f$ ?

3. Si une fonction $F$ est dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée peut-elle être continue par morceaux ?

## III

## Continuité

**14.** Comme le théorème de convergence dominée [**6.94.1**], le théorème [**15**] donne une condition suffisante pour passer à la limite sous le signe $\int$ : sa conclusion peut être écrite sous la forme suivante.

$$\forall\, x_0 \in \mathcal{V}, \quad \int_I \Big[\lim_{x\to x_0} f(x,t)\Big]\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0}\Big[\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

**15.** ➙ *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $I$, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f$ définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ et une partie $\mathcal{V}$ de $\Omega$ telles que*

**15.1 Hypothèse de continuité**

*Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est continue sur $\mathcal{V}$ ;*

**15.2 Hypothèse d'intégrabilité**

*Pour tout $x \in \mathcal{V}$, la fonction $\big[t \mapsto f(x,t)\big]$ est intégrable sur $I$ ;*

**15.3 Hypothèse de domination**

*Il existe une fonction $g$, intégrable sur $I$, telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

**15.4 Conclusion**

*Alors la fonction*

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

*est continue sur $\mathcal{V}$.*

**16. En pratique**

Pour démontrer que la fonction $F$ est continue sur $\Omega$, il faut savoir *bien choisir* $\mathcal{V}$.

**16.1** Il arrive qu'on puisse choisir $\mathcal{V} = \Omega$, mais souvent la continuité de $F$ sur $\Omega$ est établie en appliquant le théorème [**15**] à des parties $\mathcal{V} \subset \Omega$ sur lesquelles l'hypothèse de domination [**15.3**] est vérifiée. →[**7**]

**16.2** Pour vérifier cette hypothèse de domination, on cherche un majorant de $|f(x,t)|$ qui soit à la fois intégrable sur $I$ (en tant que fonction de $t$) et indépendant de $x \in \mathcal{V}$.

**16.3** Si l'intervalle d'intégration $I$ est borné, il suffit que $f$ soit bornée sur $\mathcal{V} \times I$ :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant M$$

pour vérifier l'hypothèse de domination [**15.3**].

**16.4** Si l'intervalle d'intégration $I$ est un segment, il suffit que $f$ soit continue sur $\Omega \times I$ pour que les trois hypothèses du théorème [**15**] soient vérifiées pour tout compact $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que $F$ est continue sur $\Omega$.

**17. Limite finie aux bornes de l'intervalle**
Une variante du théorème **[15]** permet d'étudier une intégrale aux extrémités de son intervalle de définition.
**17.1** ➙ *Soient $\Omega = ]\alpha, \beta[$ et $I$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f$ définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

1. *Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $I$ ;*
2. *Pour tout $t \in I$, l'expression $f(x,t)$ tend vers $\varphi(t)$ lorsque $x$ tend vers $\alpha$ ;*
3. *La fonction $[t \mapsto \varphi(t)]$ est intégrable sur $I$ ;*
4. *Il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et une fonction $g$ intégrable sur $I$ telle que*

$$\forall\, t \in I, \forall\, x \in ]\alpha, \alpha_0], \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

*Alors*

$$\lim_{x\to\alpha} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

**17.2** Pour étudier la limite au voisinage de $\beta$, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination au voisinage de $\beta$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[\beta_0, \beta[$.
**17.3** Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'une intégrale fonction d'un paramètre ait une limite *finie*.

**18. Exemples**
**18.1** *Suite de* **[3.4]** – La fonction $F$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
**18.2** *Suite de* **[3.1]** – La fonction $F$ est continue sur $]-1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
**18.3** *Suite de* **[3.2]** – La fonction $F$ est continue sur $]1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
**18.4** *Suite de* **[3.3]** – La fonction $F$ est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

### Entraînement

**19.1** Soient $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $h$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction $F$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.
**19.2** La fonction $F$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.
**19.3** La fonction $F$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{xt \sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.
**19.4** Soit $g$, intégrable sur $I = ]0,1[$. La fonction $F$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 \big|g(t) - x\big|\,\mathrm{d}t$$

est continue et convexe sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et atteint un minimum sur $\mathbb{R}$.
**19.5** Soit $0 < \alpha \leqslant 1/2$. La fonction $F_\alpha$ définie par

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et, lorsque $x$ tend vers $+\infty$,

$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}.$$

Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.
**19.6** Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$. La fonction $F$ définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{z+t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}_-$ et tend vers 0 au voisinage de l'infini. Étudier la limite de $F$ lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$ tend vers 0.

**20.** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0.
Plus précisément,

$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et

$$F(x) = -\,\ell\mathrm{n}\, x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque $x$ tend vers 0 (d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange).
**21.** Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\,\mathrm{d}u,$$

alors $f(x) = \mathcal{O}(x^{-4})$ au voisinage de $+\infty$ et

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

au voisinage de 0. Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$, mais pas sur $]0,1]$.

# IV

# Dérivation sous le signe $\int$

## IV.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

**22.** Le théorème **[23]** donne une condition suffisante pour dériver sous le signe $\int$, puisqu'on peut comprendre sa conclusion sous la forme suivante.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit ici encore de passer à la limite sous le signe $\int$, puisque l'égalité précédente peut être comprise sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\int_I \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,t)-f(x_0,t)}{x-x_0}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C'est pourquoi le théorème **[23]** est lui aussi une conséquence du théorème de convergence dominée **[6.94.1]**.

**23.** → *Soient $\Omega$ et $I$, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f$, une fonction définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

**23.1 Hypothèse de régularité**
*Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega$ ;*

**23.2 Hypothèse d'intégrabilité**
*Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions*

$$\big[t \mapsto f(x,t)\big] \quad \text{et} \quad \Big[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big]$$

*sont intégrables sur $I$ ;*

**23.3 Hypothèse de domination**
*Il existe une fonction $g$, intégrable sur $I$, et un sous-intervalle $\mathcal{V}$ de $\Omega$ tels que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant g(t).$$

**23.4 Conclusion**
*Alors la fonction $F$ définie sur $\Omega$ par*

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

*est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ et*

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**24. En pratique**
Comme pour le théorème de continuité [**15**], il savoir choisir $\mathcal{V}$ de telle sorte que l'hypothèse de domination [**23.3**] soit vérifiée.

**24.1** Si l'intervalle d'intégration $I$ est borné, il suffit de démontrer que

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, (x,t) \in \mathcal{V} \times I, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant M.$$

**24.2** Lorsque $I$ est un segment, il suffit que $f$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ contenant $\Omega \times I$ pour que toutes les hypothèses du théorème [**23**] soient vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega$.

**25. Exemples**

**25.1** *Suite de* [**19.2**] – La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

**25.2** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. →[**47**]

**25.3** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**25.4** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

**25.5** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(\mathrm{sh}^2\,t + \sin^2 x)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

## IV.2 Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

**26.** → *Soient $\Omega$ et $I$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f$ définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

**26.1 Hypothèse de régularité**
*Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\Omega$ ;*

**26.2 Hypothèse d'intégrabilité**
*Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, pour tout $x \in \Omega$, la fonction*

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

*est intégrable sur $I$ ;*

**26.3 Hypothèse de domination**
*Il existe un sous-intervalle $\mathcal{V}$ de $\Omega$ et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe une fonction $g_k$, intégrable sur $I$, tels que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \Big|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big| \leqslant g_k(t).$$

**26.4 Conclusion**
*Alors la fonction $F$ définie sur $\Omega$ par*

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

*est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathcal{V}$ et*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**27. En pratique**
Une fois de plus, il faut choisir l'intervalle $\mathcal{V}$ de telle sorte que l'hypothèse de domination [**26.3**] soit vérifiée.

**27.1** Si l'intervalle d'intégration $I$ est borné, il suffit que les fonctions $g_k$ soient constantes pour que [**26.3**] soit vérifiée.

**27.2** Si $I$ est un segment et si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ qui contient $\Omega \times I$, les hypothèses du théorème [**26**] sont vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} = [A,B]$ contenu dans $\Omega$.

**27.3** Compte tenu de l'hypothèse de domination [**26.3**], il suffit que les fonctions

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

soient continues sur $I$ pour être intégrables sur $I$ : l'hypothèse d'intégrabilité [**26.2**] est pour ainsi dire toujours vérifiée.

**28. Exemples**

**28.1** *Suite de* [**3.4**] – La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

**28.2** *Suite de* [**3.1**] – La fonction $F$ est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

**28.3** *Suite de* [**3.3**] – La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

**28.4** Soient $g \in \mathscr{C}^k$ et $h \in \mathscr{C}^\ell$, deux fonctions périodiques de période $T$. Alors la fonction $F$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est périodique de période $T$ et de classe $\mathscr{C}^{k+\ell}$.

**28.5** Les fonctions $F$ et $G$ définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On déduit de [**6.65**] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x^2).$$

**28.6** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi} e^{x\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**28.7** Les ***fonctions de Bessel*** $J_n$ définies par

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**28.8** *Suite de* [**19.6**] – La fonction $F$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

### Entraînement

**29. Questions pour réfléchir**

1. *Suite de* [**24.1**] – Comparer les assertions suivantes.

1.a

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

1.b

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

2. Sous les hypothèses du théorème [**23**], pour tout segment $[A,B] \subset \mathcal{V}$, il existe une fonction $h$, intégrable sur $I$, telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in [A,B],\quad \big|f(x,t)\big| \leqslant h(t).$$

3. Condition pour que $F$ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{V}$.

4. Si les deux premières hypothèses du théorème [**26**] sont satisfaites et s'il existe une fonction $\Phi \in \mathscr{L}^1(I)$ telle que

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \Phi(t),$$

alors l'hypothèse de domination [**26.3**] est vérifiée sur tout segment $[A,B] \subset \mathcal{V}$ et la fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathcal{V}$.

5. Expliquer les remarques [**24.2**] et [**27.2**].

**30.** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer l'allure de son graphe à l'aide de [**6.49.3**] et de [**6.78**].

**31.** On étudie les fonctions $F_1$ et $F_2$ définies par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1.

$$\forall\, x > 0,\quad F_2(x) = F_1(1/x).$$

2. La fonction $F_1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, la fonction $F_2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par [**6.65**]

$$\forall\, x > 0,\quad F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x,$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad F_2(x) = \operatorname{Arctan} x.$$

→[**48**]

**32.** *Suite de* [**6.96.6**] – La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et

$$\forall\, x > -1,\quad F(x) = \ell\mathrm{n}\,\frac{x+2}{x+1},$$

donc $F(x) \sim -\ell\mathrm{n}(x+1)$ lorsque $x$ tend vers $-1$.

## V Applications

### V.1 Intégrale de Gauss

**33.1** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est égale à $\pi/4$ en $x = 0$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

**33.2** La fonction $G$ définie par

$$G(x) = F(x) + \left[\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right]^2$$

est constante sur $\mathbb{R}$.

**33.3**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

**33.4 Densité de la loi normale**

Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\,\mathrm{d}t = 1.$$

### V.2 La fonction $\Gamma$ d'Euler

**34.** ✍ *La fonction* $\Gamma$ *est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

*pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**34.1** La fonction $\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in ]0, +\infty[,\quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ell\mathrm{n}\, t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

**35. Équation fonctionnelle et valeurs particulières**

**35.1**

$$\forall\, x > 0,\qquad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

**35.2** →[**6.62.2**]

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

**35.3**

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

**36. Comportement asymptotique de la fonction $\Gamma$**

**36.1** Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) \sim 1/x$.

**36.2** Comme

$$\forall\, x > 0,\quad \Gamma(x) \geqslant \int_1^2 t^{x-1}\frac{\mathrm{d}t}{e^2},$$

la fonction $\Gamma$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et son graphe présente une branche parabolique d'axe vertical.

**36.3** La fonction $\Gamma$ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.

**36.4** La fonction $1/\Gamma$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

**37. Étude globale**

**37.1** La fonction $\Gamma$ est strictement convexe.

**37.2** La fonction $\Gamma$ admet un minimum global et ce minimum est atteint sur $[1,2]$.

## V.3 Transformation de Laplace

**38.** La ***transformée de Laplace*** d'une fonction continue par morceaux $f$ est définie par

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La détermination de l'ensemble de définition de $L(f)$ fait partie de l'étude de $L(f)$.

**39.** On suppose que $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

**39.1** La fonction $L(f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

**39.2** Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

**39.3** La fonction $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**39.4** Si la fonction $\big[t \mapsto tf(t)\big]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

**39.5** Si la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, +\infty[$ et

$$L(f)(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k p^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t + o(p^n)$$

pour $p$ voisin de 0.

**40. Théorème de la valeur initiale**

On suppose que $f$ est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

**40.1** La fonction $L(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

**40.2** Si $f$ admet une limite (finie) non nulle $f(0^+)$ au voisinage de 0, alors

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} pe^{-pt}\big[f(t) - f(0^+)\big]\,\mathrm{d}t = 0$$

et, lorsque $p$ tend vers $+\infty$,

$$L(f)(p) \sim \frac{f(0^+)}{p}.$$

**40.3** Si $f$ est positive mais pas intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $L(f)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

**41. Théorème de la valeur finale**

Si $f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers une limite finie $\ell$ au voisinage de $+\infty$, alors $L(f)(p)$ est défini pour tout $p > 0$ et $pL(f)(p)$ tend vers $\ell$ au voisinage de $p = 0$.

---

## Questions, exercices & problèmes

### Perfectionnement

**42. Exemples et contre-exemples**

1. Exemple de fonction $f$ intégrable sur $I = [0, +\infty[$, non bornée sur $I$, pour laquelle la fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est lipschitzienne sur $I$.

2. Exemple de fonction dérivable $F$ telle que

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sans que} \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Suite de* [**58**] – Exemple où la fonction $g$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

**43. Méthodes**

1. Comment démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ? sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ?
2. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point $x_0$ de son ensemble de définition ?
3. Comment démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite au voisinage d'un point $x_0$ ?
4. Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

tend vers l'infini ? Peut-on utiliser le théorème de convergence dominée à cet effet ?

5. Soit $f$, une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Si sa dérivée $f'$ tend vers l'infini au voisinage de 0, alors $f$ n'est pas dérivable en 0.

**44. Questions pour réfléchir**

1. Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite (finie ou infinie).
2. Déduire le théorème de continuité [**15**] du théorème de convergence dominée [**6.94.1**].
3. Déduire le théorème [**23**] de dérivation sous le signe $\int$ du théorème de convergence dominée [**6.94.1**] et du théorème de continuité [**15**].
4. Généraliser le théorème [**23**] de dérivation sous le signe $\int$ aux fonctions $f$ définies sur $\Omega \times I$, où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
5. 

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{n}.$$

### Approfondissement

**45.** Soit $f$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $g$ définie par

$$g(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(x,ux)\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

**46. Fonction d'Euler et constante d'Euler**

**46.1**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -\int_0^1 (n+1)y^n\,\ell\mathrm{n}(1-y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

**46.2** *Suite de* [**4.37**] –

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \ell\mathrm{n}\,x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

**46.3** *Suite de* [**6.105**] –

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\ell\mathrm{n}\,x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

**47. Une transformée de Fourier remarquable**

1. *Suite de* [**6.66**] – La transformée de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

est une solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.

2. La relation suivante se déduit du théorème [**33.4**] qu'elle permet de généraliser. →[**25.2**]

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}.$$

3.a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos xt\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x^2/2}.$$

3.b La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \sin xt \, dt$$

est la solution de l'équation différentielle $y' + xy = 1$ qui s'annule en $x = 0$.

**48. Intégrale de Dirichlet**

1. La fonction $F_1$ définie par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. L'intégrale impropre

$$F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, dt$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

3.
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \, dt.$$

La fonction $F_2$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

4. Comme $F_1$ et $F_2$ sont deux solutions de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

qui tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$, elles sont égales et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

**49.** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

En déduire l'expression de $F(x)$.

**50.** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)u}}{2\sqrt{u}} \, du$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2(x+i)F'(x) + F(x) = 0.$$

On déduit donc de [35.3] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{1+x^2}} e^{i(\operatorname{Arctan} x)/2}.$$

**51.** *Suite de* [3.5] –

1. La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \ell n(1+x).$$

3.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2 t}{t^2} \, dt = \pi \ell n 2.$$

**52.** La fonction $F$ définie par

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $O = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$. On déduit de ses dérivées partielles que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, y > 0, \quad F(x,y) = \ell n \frac{y}{x}.$$

**53. Intégrales de Wallis généralisées**

1. La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$$

est positive, décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

2.
$$\forall\, x > -1, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

3. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = xF(x)F(x-1).$$

3.a
$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

3.b
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad nF(n)F(n-1) = \frac{\pi}{2}.$$

3.c Lorsque $x$ tend vers $+\infty$,

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

**54.** La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par [33.4],

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

et par [**6**.96.5]

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^x \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

**55.**

1. La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ell n(1 + 2t\cos x + t^2)}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

2.
$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{\sin x \, dt}{(t+\cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{x}{2}.$$

3.a Pour tout $u \in ]-1, 1[$,

$$\ell n(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}.$$

3.b *Suite de* [**4.45**] –

$$\forall\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

**56.**

1. La fonction $F$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

2.

$$\forall\ x > 0, \quad F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

3. *Suite de* [**6.100.2**] – Pour $x$ voisin de 0,

$$F(x) = \frac{1}{x} - \ell n\, 2 + \frac{\pi^2}{12}x + o(x).$$

**57.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

1.

$$\forall\ x > 0, \quad I_0(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $I_n$ est décroissante, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\ x > 0, \quad I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2(n+1)x} I_n'(x).$$

3. La relation précédente suggère de chercher une expression simple de la forme

$$I_n(x) = \frac{a_n}{2^{n+1} n! x^{2n+1}}.$$

Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

4.

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x > 0, \quad I_n(x) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{1}{x^{2n+1}}.$$

→[**6.62.3**]

## Pour aller plus loin

**58. Factorisation d'une fonction**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

1.a Pourquoi faut-il supposer que $f(0) = 0$ ?
1.b Discuter l'unicité de la fonction $g$.
2. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)\,dt.$$

**59. Fonctions de plusieurs variables**
Soient $\Omega$ et $I$, deux intervalles ouverts (non vides) de $\mathbb{R}$ et $f$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$.

1. La fonction définie par

$$\forall\ (x,y,z) \in \Omega \times I \times I, \quad F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f(x,z).$$

2. Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\Omega$ dans $I$, alors la fonction définie par

$$\forall\ x \in \Omega, \quad G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$G'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - f\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) + f\big(x,\psi(x)\big)\psi'(x).$$

**60. Intégrations successives**
On suppose que $f$ est continue sur $[a,b] \times [c,d]$.

**60.1** La fonction $h$ définie par

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

est continue sur $[a,b]$ et la fonction $F_1$ définie par

$$\forall\ u \in [a,b], \quad F_1(u) = \int_a^u h(x)\,dx$$

est une primitive de $h$ sur $[a,b]$.

**60.2** Pour $(u,y) \in [a,b] \times [c,d]$, on pose

$$k(u,y) = \int_a^u f(x,y)\,dx.$$

1. La fonction $\big[y \mapsto k(u,y)\big]$ est continue sur $[c,d]$.
2. La fonction $\big[u \mapsto k(u,y)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\forall\ (u,y) \in [a,b] \times [c,d], \quad \frac{\partial k}{\partial u}(u,y) = f(u,y).$$

3. La fonction $F_2$ définie par

$$\forall\ u \in [a,b], \quad F_2(u) = \int_c^d k(u,y)\,dy$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$F_2'(u) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial u}(u,y)\,dy = h(u).$$

**60.3** Les deux fonctions $F_1$ et $F_2$ sont égales sur $[a,b]$.

**60.4** ➙ *Soit $f$, une fonction continue sur le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$