Intégrales fonctions d'un paramètre

1. Étant donnée une fonction f des variables $x \in \Omega$ et $t \in I$ telle que, pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ soit intégrable sur I, on étudie les propriétés de la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

et en particulier sa régularité (continuité, dérivabilité).

2. La parité, la monotonie, la convexité et la continuité de F peuvent parfois se déduire très simplement de f.

2.1 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est croissante (resp. décroissante), alors la fonction F est croissante (resp. décroissante).

2.2 Si, pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est convexe (resp. concave), alors la fonction F est convexe (resp. concave).

2.3 S'il existe une fonction g, intégrable sur I, et une constante K telles que

$$\forall\,(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times I, \quad \big|f(x,t) - f(y,t)\big| \leqslant Kg(t)|x-y|,$$

alors F est lipschitzienne sur Ω.

3. Exemples

3.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt^2}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]-1,+\infty[$.

3.2 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$$

est décroissante, convexe et positive sur $]1,+\infty[$.

3.3 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et positive sur $]0,+\infty[$.

3.4 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante, convexe et bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $a>0$, la fonction F est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$.

3.5 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

est impaire et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

I

Rappels sur la continuité

4. ✍ *Une fonction est* **continue sur un intervalle** *(resp.* **sur un ouvert)** *lorsqu'elle est continue en chaque point de cet intervalle (resp. de cet ouvert).*

I.1 Caractérisations séquentielles

5. On considère une fonction φ définie sur Ω, à valeurs dans un espace E.

5.1 ➙ *La fonction φ est continue en $x_0 \in \Omega$ si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

5.2 Par définition, une fonction ne peut être continue qu'en un point x_0 de son ensemble de définition.
En revanche, on peut étudier l'existence d'une limite pour φ au voisinage d'un point x_0 qui n'appartient pas à son ensemble de définition Ω.

5.3 ➙ *La fonction φ tend vers une limite ℓ (appartenant à E ou infinie) au voisinage de x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.*

I.2 Du local au global

6. Topologie locale de $\mathbb{R}^d$

6.1 ➙ *Soit Ω, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un segment $[A,B]$ tel que*

$$x_0 \in [A,B] \subset \Omega.$$

6.2 ➙ *Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x_0 \in I$, il existe une boule fermée B_r de rayon $r>0$ telle que*

$$x_0 \in B_r \subset \Omega.$$

7. Méthodes

La définition **[4]** permet de parvenir à une *conclusion globale* par une *démonstration locale*.

7.1 Une fonction est continue sur un intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle est continue sur tout segment $[A,B] \subset \Omega$.

7.2 Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si, et seulement si, elle est continue sur toute boule fermée contenue dans Ω.

8. Exemples de mise en œuvre

8.1 Une fonction est continue sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, pour tout $B>0$, elle est continue sur le segment $[0,B]$.

8.2 Une fonction est continue sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, quels que soient $0<A<B$, elle est continue sur $[A,B]$.

8.3 Une fonction est continue sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, quel que soit $A>0$, elle est continue sur $[A,+\infty[$.

8.4 Une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quel que soit $A>0$, elle est continue sur $[-A,A]$.

8.5 Une fonction est continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si, et seulement si, elle est continue sur tout pavé $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ contenu dans Ω.

9. Comme les fonctions dérivables sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ sont définies de manière analogue aux fonctions continues, on peut utiliser des méthodes analogues pour prouver qu'une fonction est dérivable sur un intervalle donné ou de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert donné.

Entraînement

10. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**1**] –

1.a Condition suffisante pour que F soit bornée sur Ω ?

1.b Si la fonction f est bornée sur $\Omega \times I$, la fonction F est-elle bornée sur Ω ?

2. *Suite de* [**3.4**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $\pi/2$ au voisinage de 0.

3. *Suite de* [**3.1**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de -1. →[**3.131**]

4. *Suite de* [**3.2**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 1. →[**3.131**]

5. *Suite de* [**3.3**] – La fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0. →[**3.131**]

6. *Suite de* [**5.1**] – Que dire de la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$?

7. *Suite de* [**5.3**] – Que conclure si φ admet une limite en un point $x_0 \in \Omega$? Cette limite peut-elle être infinie ?

8. *Suite de* [**5.3**] – On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui tend vers x_0, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction φ admet une limite au voisinage de x_0.

II

Intégrale fonction des bornes

11. Soit f, une fonction intégrable sur l'intervalle ouvert I. Pour tout $x_0 \in I$, on considère la fonction F_{x_0} définie par

$$\forall\, x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11.1 Si f est bornée sur I, alors F_{x_0} est lipschitzienne sur I.

11.2 La fonction F_{x_0} est continue sur I.

11.3 La fonction F_{x_0} est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in I$ et

$$(F_{x_0})'_g(x) = f(x^-), \quad (F_{x_0})'_d(x) = f(x^+).$$

11.4 ➞ Théorème fondamental

Soient f, une fonction continue sur I et $x_0 \in I$. La fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et est une primitive de f.

11.5 Soient $f \in \mathscr{C}^0(I)$; φ et ψ, de classe $\mathscr{C}^1$ de J dans I. La fonction

$$G = \left[u \mapsto \int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et

$$\forall\, u \in J, \quad G'(u) = f\big(\psi(u)\big)\psi'(u) - f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u).$$

12. ➞ *Soit f, une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente, alors la fonction G définie par

$$\forall\, x \geqslant a, \quad G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $G' = -f$.

Entraînement

13. Questions pour réfléchir

1. Étudier le signe et les variations de

$$G(x) = \int_x^{x^2} \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer un équivalent de $G(x)$ au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

2. *Suite de* [**11**] – Si F_{x_0} est dérivable sur I, sa dérivée est-elle égale à f ?

3. Si une fonction F est dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée peut-elle être continue par morceaux ?

III

Continuité

14. Comme le théorème de convergence dominée [**6.93.1**], le théorème [**15**] donne une condition suffisante pour passer à la limite sous le signe $\int$: sa conclusion peut être écrite sous la forme suivante.

$$\forall\, x_0 \in \mathcal{V}, \quad \int_I \Big[\lim_{x\to x_0} f(x,t)\Big]\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} \Big[\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

15. ➞ *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ et une partie $\mathcal{V}$ de Ω telles que*

15.1 Hypothèse de continuité

Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est continue sur $\mathcal{V}$;

15.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \mathcal{V}$, la fonction $\big[t \mapsto f(x,t)\big]$ est intégrable sur I ;

15.3 Hypothèse de domination

Il existe une fonction g, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, t \in I, \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

15.4 Conclusion

Alors la fonction

$$F = \left[x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue sur $\mathcal{V}$.

16. En pratique

Pour démontrer que la fonction F est continue sur Ω, il faut savoir *bien choisir* $\mathcal{V}$.

16.1 Il arrive qu'on puisse choisir $\mathcal{V} = \Omega$, mais souvent la continuité de F sur Ω est établie en appliquant le théorème [**15**] à des parties $\mathcal{V} \subset \Omega$ sur lesquelles l'hypothèse de domination [**15.3**] est vérifiée. →[**7**]

16.2 Pour vérifier cette hypothèse de domination, on cherche un majorant de $|f(x,t)|$ qui soit à la fois intégrable sur I (en tant que fonction de t) et indépendant de $x \in \mathcal{V}$.

16.3 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que f soit bornée sur $\mathcal{V} \times I$:

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+, \forall\, t \in I, \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant M$$

pour vérifier l'hypothèse de domination [**15.3**].

16.4 Si l'intervalle d'intégration I est un segment, il suffit que f soit continue sur $\Omega \times I$ pour que les trois hypothèses du théorème [**15**] soient vérifiées pour tout compact $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que F est continue sur Ω.

17. Limite finie aux bornes de l'intervalle

Une variante du théorème [**15**] permet d'étudier une intégrale aux extrémités de son intervalle de définition.

17.1 ➜ *Soient $\Omega =]\alpha, \beta[$ et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

1. *Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I ;*
2. *Pour tout $t \in I$, l'expression $f(x,t)$ tend vers $\varphi(t)$ lorsque x tend vers α ;*
3. *La fonction $[t \mapsto \varphi(t)]$ est intégrable sur I ;*
4. *Il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et une fonction g intégrable sur I telle que*

$$\forall\, t \in I, \forall\, x \in]\alpha, \alpha_0], \quad \big|f(x,t)\big| \leqslant g(t).$$

Alors

$$\lim_{x \to \alpha} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

17.2 Pour étudier la limite au voisinage de β, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination au voisinage de β, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[\beta_0, \beta[$.

17.3 Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'une intégrale fonction d'un paramètre ait une limite *finie*.

18. Exemples

18.1 *Suite de* [**3.4**] – La fonction F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.2 *Suite de* [**3.1**] – La fonction F est continue sur $]-1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.3 *Suite de* [**3.2**] – La fonction F est continue sur $]1, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

18.4 *Suite de* [**3.3**] – La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Entraînement

19.1 Soient $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et h, continue et bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.

19.2 La fonction F définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.

19.3 La fonction F définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^{\pi} \frac{xt \sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $[0,1]$.

19.4 Soit g, intégrable sur $I =]0,1[$. La fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^1 \big|g(t) - x\big|\,\mathrm{d}t$$

est continue et convexe sur $\mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et atteint un minimum sur $\mathbb{R}$.

19.5 Soit $0 < \alpha \leqslant 1/2$. La fonction F_α définie par

$$F_\alpha(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ et, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}.$$

Étudier la limite en 0 en distinguant le cas $\alpha = 1/2$.

19.6 Soit $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$. La fonction F définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{z+t}\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}_-$ et tend vers 0 au voisinage de l'infini. Étudier la limite de F lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$ tend vers 0.

20. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et vers $+\infty$ au voisinage de 0.
Plus précisément,

$$F(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$F(x) = -\ell n\, x + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers 0 (d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange).

21. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{x^4+u^4}}\,\mathrm{d}u,$$

alors $f(x) = \mathcal{O}(x^{-4})$ au voisinage de $+\infty$ et

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

au voisinage de 0. Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$, mais pas sur $]0, 1]$.

IV

Dérivation sous le signe $\int$

IV.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

22. Le théorème [**23**] donne une condition suffisante pour dériver sous le signe $\int$, puisqu'on peut comprendre sa conclusion sous la forme suivante.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Il s'agit ici encore de passer à la limite sous le signe $\int$, puisque l'égalité précédente peut être comprise sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \int_I \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_I \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C'est pourquoi le théorème [**23**] est lui aussi une conséquence du théorème de convergence dominée [**6.93.1**].

23. ➙ *Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

23.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;

23.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$\big[t \mapsto f(x,t)\big] \quad \text{et} \quad \Big[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big]$$

sont intégrables sur I ;

23.3 Hypothèse de domination

Il existe une fonction g, intégrable sur I, et un sous-intervalle $\mathcal{V}$ de Ω tels que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant g(t).$$

23.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{V}$ et

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

24. En pratique

Comme pour le théorème de continuité [**15**], il savoir choisir $\mathcal{V}$ de telle sorte que l'hypothèse de domination [**23.3**] soit vérifiée.

24.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit de démontrer que

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, (x,t) \in \mathcal{V} \times I, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant M.$$

24.2 Lorsque I est un segment, il suffit que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ contenant $\Omega \times I$ pour que toutes les hypothèses du théorème [**23**] soient vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} \subset \Omega$, ce qui montre que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

25. Exemples

25.1 *Suite de* [**19.2**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

25.2 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. →[**47**]

25.3 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

25.4 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\cos t\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

25.5 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(\mathrm{sh}^2\,t + \sin^2 x)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

IV.2 Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

26. ➙ *Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*

26.1 Hypothèse de régularité

Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x,t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω ;

26.2 Hypothèse d'intégrabilité

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, pour tout $x \in \Omega$, la fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

est intégrable sur I ;

26.3 Hypothèse de domination

Il existe un sous-intervalle $\mathcal{V}$ de Ω et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe une fonction g_k, intégrable sur I, tels que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \Big|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big| \leqslant g_k(t).$$

26.4 Conclusion

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathcal{V}$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

27. En pratique

Une fois de plus, il faut choisir l'intervalle $\mathcal{V}$ de telle sorte que l'hypothèse de domination [**26.3**] soit vérifiée.

27.1 Si l'intervalle d'intégration I est borné, il suffit que les fonctions g_k soient constantes pour que [**26.3**] soit vérifiée.

27.2 Si I est un segment et si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ qui contient $\Omega \times I$, les hypothèses du théorème [**26**] sont vérifiées pour tout segment $\mathcal{V} = [A,B]$ contenu dans Ω.

27.3 Compte tenu de l'hypothèse de domination [**26.3**], il suffit que les fonctions

$$\Big[t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\Big]$$

soient continues sur I pour être intégrables sur I : l'hypothèse d'intégrabilité [**26.2**] est pour ainsi dire toujours vérifiée.

28. Exemples

28.1 *Suite de* [**3.4**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

28.2 *Suite de* [**3.1**] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

28.3 *Suite de* [**3.3**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

28.4 Soient $g \in \mathscr{C}^k$ et $h \in \mathscr{C}^\ell$, deux fonctions périodiques de période T. Alors la fonction F définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est périodique de période T et de classe $\mathscr{C}^{k+\ell}$.

28.5 Les fonctions F et G définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos xt)}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On déduit de [**6.65**] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x^2).$$

28.6 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^\pi e^{x\sin^2\theta}\,d\theta$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
28.7 Les ***fonctions de Bessel*** J_n définies par

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,dt$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
28.8 *Suite de* [**19.6**] – La fonction F est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.

Entraînement

29. Questions pour réfléchir
1. *Suite de* [**24.1**] – Comparer les assertions suivantes.
1.a

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

1.b

$$\forall\,(x,t) \in \mathcal{V}\times I,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M$$

2. Sous les hypothèses du théorème [**23**], pour tout segment $[A,B]\subset\mathcal{V}$, il existe une fonction h, intégrable sur I, telle que

$$\forall\, t\in I,\ \forall\, x\in[A,B],\quad |f(x,t)| \leqslant h(t).$$

3. Condition pour que F soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{V}$.
4. Si les deux premières hypothèses du théorème [**26**] sont satisfaites et s'il existe une fonction $\Phi\in\mathscr{L}^1(I)$ telle que

$$\forall\,(x,t)\in\mathcal{V}\times I,\quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \Phi(t),$$

alors l'hypothèse de domination [**26.3**] est vérifiée sur tout segment $[A,B]\subset\mathcal{V}$ et la fonction F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathcal{V}$.
5. Expliquer les remarques [**24.2**] et [**27.2**].

30. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Tracer l'allure de son graphe à l'aide de [**6.49.3**] et de [**6.78**].

31. On étudie les fonctions F_1 et F_2 définies par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad\text{et}\quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}\,dt.$$

1.

$$\forall\, x>0,\quad F_2(x) = F_1(1/x).$$

2. La fonction F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, la fonction F_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par [**6.65**]

$$\forall\, x>0,\quad F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x,$$
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad F_2(x) = \operatorname{Arctan} x.$$

→[**48**]

32. *Suite de* [**6.95.6**] – La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et

$$\forall\, x>-1,\quad F(x) = \ell n\,\frac{x+2}{x+1},$$

donc $F(x) \sim -\ell n(x+1)$ lorsque x tend vers -1.

V
Applications

V.1 Intégrale de Gauss

33.1 La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\frac{dt}{1+t^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est égale à $\pi/4$ en $x=0$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
33.2 La fonction G définie par

$$G(x) = F(x) + \left[\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right]^2$$

est constante sur $\mathbb{R}$.
33.3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

33.4 Densité de la loi normale
Quels que soient $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\,dt = 1.$$

V.2 La fonction Γ d'Euler

34. ✍ *La fonction* Γ *est définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.
34.1 La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et, quel que soit l'entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x\in\,]0,+\infty[,\quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ell n\, t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

35. Équation fonctionnelle et valeurs particulières
35.1

$$\forall\, x>0,\qquad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

35.2 →[**6.62.2**]

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

35.3

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

36. Comportement asymptotique de la fonction Γ
36.1 Au voisinage de 0, on a $\Gamma(x)\sim 1/x$.
36.2 Comme

$$\forall\, x>0,\quad \Gamma(x) \geqslant \int_1^2 t^{x-1}\frac{dt}{e^2},$$

la fonction Γ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et son graphe présente une branche parabolique d'axe vertical.
36.3 La fonction Γ n'est intégrable ni au voisinage de 0, ni au voisinage de $+\infty$.
36.4 La fonction $1/\Gamma$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

37. Étude globale
37.1 La fonction Γ est strictement convexe.
37.2 La fonction Γ admet un minimum global et ce minimum est atteint sur $[1,2]$.

V.3 Transformation de Laplace

38. La ***transformée de Laplace*** d'une fonction continue par morceaux f est définie par

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La détermination de l'ensemble de définition de $L(f)$ fait partie de l'étude de $L(f)$.

39. On suppose que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

39.1 La fonction $L(f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

39.2 Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

39.3 La fonction $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

39.4 Si la fonction $\big[t \mapsto tf(t)\big]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

39.5 Si la fonction $[t \mapsto t^n f(t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et

$$L(f)(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k p^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t + o(p^n)$$

pour p voisin de 0.

40. Théorème de la valeur initiale
On suppose que f est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

40.1 La fonction $L(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

40.2 Si f admet une limite (finie) non nulle $f(0^+)$ au voisinage de 0, alors

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} pe^{-pt}\big[f(t) - f(0^+)\big]\,\mathrm{d}t = 0$$

et, lorsque p tend vers $+\infty$,

$$L(f)(p) \sim \frac{f(0^+)}{p}.$$

40.3 Si f est positive mais pas intégrable sur $]0,+\infty[$, alors $L(f)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0.

41. Théorème de la valeur finale
Si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$, alors $L(f)(p)$ est défini pour tout $p > 0$ et $pL(f)(p)$ tend vers ℓ au voisinage de $p = 0$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

42. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de fonction f intégrable sur $I = [0,+\infty[$, non bornée sur I, pour laquelle la fonction

$$F_{x_0} = \left[x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est lipschitzienne sur I.

2. Exemple de fonction dérivable F telle que

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sans que} \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Suite de* **[58]** – Exemple où la fonction g n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

43. Méthodes

1. Comment démontrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$? sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$?
2. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point x_0 de son ensemble de définition ?
3. Comment démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite au voisinage d'un point x_0 ?
4. Comment démontrer qu'une fonction définie par une intégrale

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

tend vers l'infini ? Peut-on utiliser le théorème de convergence dominée à cet effet ?

5. Soit f, une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. Si sa dérivée f' tend vers l'infini au voisinage de 0, alors f n'est pas dérivable en 0.

44. Questions pour réfléchir

1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite (finie ou infinie).
2. Déduire le théorème de continuité **[15]** du théorème de convergence dominée **[6.93.1]**.
3. Déduire le théorème **[23]** de dérivation sous le signe $\int$ du théorème de convergence dominée **[6.93.1]** et du théorème de continuité **[15]**.
4. Généraliser le théorème **[23]** de dérivation sous le signe $\int$ aux fonctions f définies sur $\Omega \times I$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
5.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{n}.$$

Approfondissement

45. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
La fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^x f(x,t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 f(x,ux)\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

46. Fonction d'Euler et constante d'Euler

46.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad -\int_0^1 (n+1)y^n\,\ell\mathrm{n}(1-y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

46.2 *Suite de* **[4.37]** –

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \ell\mathrm{n}\, x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

46.3 *Suite de* **[6.104]** –

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\ell\mathrm{n}\, x\,\mathrm{d}x = -\gamma$$

47. Une transformée de Fourier remarquable

1. *Suite de* **[6.66]** – La transformée de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

est une solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.

2. La relation suivante se déduit du théorème **[33.4]** qu'elle permet de généraliser. →**[25.2]**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt - t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}.$$

3.a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos xt\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x^2/2}.$$

3.b La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \sin xt \, dt$$

est la solution de l'équation différentielle $y' + xy = 1$ qui s'annule en $x = 0$.

48. Intégrale de Dirichlet

1. La fonction F_1 définie par

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. L'intégrale impropre

$$F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} \, dt$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

3.

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(t+x)^2} \, dt.$$

La fonction F_2 ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

4. Comme F_1 et F_2 sont deux solutions de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

qui tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$, elles sont égales et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

49. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ell n(1+x^2t^2)}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad F'(x) = \frac{\pi}{1+x}.$$

En déduire l'expression de $F(x)$.

50. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)u}}{2\sqrt{u}} \, du$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2(x+i)F'(x) + F(x) = 0.$$

On déduit donc de [**35.3**] que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{1+x^2}} \, e^{i(\operatorname{Arctan} x)/2}.$$

51. *Suite de* [**3.5**] –

1. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \, \ell n(1+x).$$

3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2 t}{t^2} \, dt = \pi \, \ell n 2.$$

52. La fonction F définie par

$$F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $O =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On déduit de ses dérivées partielles que

$$\forall\, x > 0, \forall\, y > 0, \quad F(x,y) = \ell n \frac{y}{x}.$$

53. Intégrales de Wallis généralisées

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t \, dt$$

est positive, décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

2.

$$\forall\, x > -1, \quad F(x+2) = \frac{x+1}{x+2} F(x).$$

3. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = xF(x)F(x-1).$$

3.a

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x).$$

3.b

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad nF(n)F(n-1) = \frac{\pi}{2}.$$

3.c Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

54. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \, dt$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par [**33.4**],

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) - F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

et par [**6.95.5**]

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^x \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

55.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ell n(1 + 2t\cos x + t^2)}{t} \, dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

2.

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{\sin x \, dt}{(t+\cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{x}{2}.$$

3.a Pour tout $u \in]-1, 1[$,

$$\ell n(1+u) = \int_0^u \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}.$$

3.b *Suite de* [**4.45**] –

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

56.

1. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

2.
$$\forall\, x > 0, \quad F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

3. *Suite de* [**6.99.2**] – Pour x voisin de 0,

$$F(x) = \frac{1}{x} - \ell\text{n}\, 2 + \frac{\pi^2}{12}x + o(x).$$

57. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

1.
$$\forall\, x > 0, \quad I_0(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est décroissante, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2(n+1)x} I_n'(x).$$

3. La relation précédente suggère de chercher une expression simple de la forme

$$I_n(x) = \frac{a_n}{2^{n+1} n! x^{2n+1}}.$$

Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4.
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad I_n(x) = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \frac{1}{x^{2n+1}}.$$

→[**6.62.3**]

Pour aller plus loin

58. Factorisation d'une fonction
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xg(x).$$

1.a Pourquoi faut-il supposer que $f(0) = 0$?
1.b Discuter l'unicité de la fonction g.
2. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

59. Fonctions de plusieurs variables
Soient Ω et I, deux intervalles ouverts (non vides) de $\mathbb{R}$ et f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$.

1. La fonction définie par

$$\forall\, (x,y,z) \in \Omega \times I \times I, \quad F(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f(x,z).$$

2. Si φ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans I, alors la fonction définie par

$$\forall\, x \in \Omega, \quad G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$G'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t - f\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) + f\big(x,\psi(x)\big)\psi'(x).$$

60. Intégrations successives
On suppose que f est continue sur $[a,b] \times [c,d]$.

60.1 La fonction h définie par

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

est continue sur $[a,b]$ et la fonction F_1 définie par

$$\forall\, u \in [a,b], \quad F_1(u) = \int_a^u h(x)\,\mathrm{d}x$$

est une primitive de h sur $[a,b]$.

60.2 Pour $(u,y) \in [a,b] \times [c,d]$, on pose

$$k(u,y) = \int_a^u f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

1. La fonction $\big[y \mapsto k(u,y)\big]$ est continue sur $[c,d]$.
2. La fonction $\big[u \mapsto k(u,y)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\forall\, (u,y) \in [a,b] \times [c,d], \quad \frac{\partial k}{\partial u}(u,y) = f(u,y).$$

3. La fonction F_2 définie par

$$\forall\, u \in [a,b], \quad F_2(u) = \int_c^d k(u,y)\,\mathrm{d}y$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$F_2'(u) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial u}(u,y)\,\mathrm{d}y = h(u).$$

60.3 Les deux fonctions F_1 et F_2 sont égales sur $[a,b]$.

60.4 ➙ *Soit f, une fonction continue sur le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$