

• Par hypothèse, quels que soient les vecteurs x et y , quel que soit le réel t ,

$$0 \leq \|u(x + ty)\| \leq \|x + ty\|.$$

En élevant au carré, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad q(t) \geq 0.$$

• Développons l'expression $q(t)$ au moyen de l'identité remarquable [8.3], en utilisant la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire :

$$q(t) = (\|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2) - (\|u(x)\|^2 + 2t \langle u(x) | u(y) \rangle + t^2 \|u(y)\|^2).$$

En réordonnant les termes, on voit apparaître un polynôme de degré inférieur à 2, à coefficients réels :

$$q(t) = at^2 + 2bt + c$$

avec

$$a = \|y\|^2 - \|u(y)\|^2, \quad b = \langle x | y \rangle - \langle u(x) | u(y) \rangle, \quad c = \|x\|^2 - \|u(x)\|^2.$$

► Si $a \neq 0$, il s'agit d'un polynôme de degré 2. Ce polynôme ne peut avoir deux racines réelles distinctes (sinon, il changerait de signe entre les racines), donc son *discriminant réduit* est négatif :

$$\delta = b^2 - ac \leq 0.$$

► Si $a = 0$, alors on a un polynôme de degré inférieur à 1 dont le signe est constant. Il faut donc que ce soit un polynôme constant et donc que $b = 0$. Dans ce cas particulier, on a donc $b^2 - ac = 0$.

Bref, dans tous les cas, on a

$$\forall x, y \in E, \quad [\langle x | y \rangle - \langle u(x) | u(y) \rangle]^2 - [\|x\|^2 - \|u(x)\|^2][\|y\|^2 - \|u(y)\|^2].$$

• Comme u est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension FINIE (il s'agit d'un espace *euclidien*), le Théorème du rang nous assure que

$$\dim E = \dim \text{Ker}(u - I) + \dim \text{Im}(u - I).$$

Il reste donc à vérifier que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour en déduire que

$$E = \text{Ker}(u - I) \oplus^\perp \text{Im}(u - I).$$

REMARQUE.— L'argument de dimension nous permet de vérifier seulement l'inclusion

$$\text{Ker}(u - I) \subset (\text{Im}(u - I))^\perp$$

au lieu de vérifier l'égalité de ces deux sous-espaces (par *double inclusion*).

• Considérons donc deux vecteurs $x \in \text{Ker}(u - I)$ et $z \in \text{Im}(u - I)$. On a donc d'une part

$$u(x) = x$$

et d'autre part, il existe un vecteur $y \in E$ tel que $z = u(y) - y$.

D'après ce qu'on a établi plus haut,

$$[\langle x | y \rangle - \langle u(x) | u(y) \rangle]^2 \leq 0$$

(puisque $u(x) - x = 0_E$) et donc

$$\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Mais, une fois encore, $u(x) = x$, donc

$$\langle x | y - u(y) \rangle = 0$$

par linéarité à gauche du produit scalaire. On a bien démontré que $\langle x | z \rangle = 0$, ce qui prouve que les sous-espaces $\text{Ker}(u - I)$ et $\text{Im}(u - I)$ sont orthogonaux et donc que

$$E = \text{Ker}(u - I) \oplus^\perp \text{Im}(u - I).$$