Soit $p \in \mathbb{N}$.

1❧ *Démontrer que l'intégrale généralisée*

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, e^{-nx}\, dx$$

converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2❧ *Démontrer que l'intégrale généralisée*

$$\Gamma(a, b) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\, dx$$

converge quels que soient $a \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $\Gamma(a, b)$ *sachant que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!.$$

3❧ *Démontrer que la suite* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

4❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}.$$

1❧ Pour tout $x \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$f_0(x) = \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = e^{-nx} f_0(x).$$

❧ La fonction f_0 est continue sur l'intervalle ouvert I.

❧ Lorsque x tend vers 0,

$$f_0(x) \sim \frac{x^{p+1}}{x} = x^p$$

donc f_0 peut être prolongée en une fonction continue sur $I_0 = [0, +\infty[$ en posant

$$f_0(x) = 0.$$

De ce fait, la fonction f_0 est intégrable au voisinage de 0.

❧ Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f_0(x) \sim x^{p+1} e^{-x} = x^{p+1} e^{-x/2} \cdot e^{-x/2} = o(e^{-x/2}).$$

Or la fonction $[x \mapsto e^{-x/2}]$ est une fonction de référence, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc f_0 est elle aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction f_0 est donc intégrable sur l'intervalle I.

❧ En tant que produit de la fonction f_0, qui est intégrable sur I, par la fonction $[x \mapsto e^{-nx}]$, qui est continue et bornée sur I, la fonction f_n est intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée S_n est (absolument) convergente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2❧ Quels que soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_{a,b} = [x \mapsto x^a e^{-bx}]$$

est continue sur l'intervalle $I_0 = [0, +\infty[$. Comme plus haut,

$$f_{a,b}(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{-bx/2})$$

et comme $b/2 > 0$, on en déduit que $f_{a,b}$ est intégrable sur l'intervalle I_0.

Par conséquent, l'intégrale généralisée $\Gamma(a, b)$ est (absolument) convergente quels que soient les entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

❧ On vient de prouver que la fonction $f_{a,b}$ est intégrable sur I_0.

Comme $b > 0$, on peut effectuer le changement de variable affine $y = bx$ avec $dy = b\,dx$:

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\,dx = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} (bx)^a e^{-bx}(b\,dx) = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} y^a e^{-y}\,dy$$

donc

$$\forall\,(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}.$$

3❧ La fonction f_0 est continue sur l'intervalle ouvert I. De plus, elle tend vers 0 aussi bien au voisinage de 0 qu'au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est bornée sur I et

$$\forall\,x \in I, \quad |f_0(x)| \leqslant \|f_0\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \forall\,x \in I, \quad |f_n(x)| \leqslant \|f_0\|_\infty\, e^{-nx}.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la positivité de l'intégration, on en déduit que

$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n| \leqslant \int_0^{+\infty} \|f_0\|_\infty\, e^{-nx}\,dx = \frac{\|f_0\|_\infty}{n}.$$

On déduit du Théorème d'encadrement que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

✍ *Par positivité de l'intégration, on peut aussi vérifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

4❧ Pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $0 < e^{-x} < 1$:

$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}.$$

Comme les fonctions f_k sont toutes intégrables sur I, on déduit de la linéarité de l'intégrale que

$$\begin{aligned}\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad S_0 &= S_n + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx}\,dx\\ &= S_n + \sum_{k=1}^{n} \Gamma(p+1, k)\\ &= S_n + (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}}.\end{aligned}$$

❧ On reconnaît une somme partielle d'une série de Riemann convergente. Et comme on sait que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit enfin que

$$S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

c'est-à-dire

$$\forall\,p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\,dx = (p+1)!\,\zeta(p+2).$$

✍ *On aurait aussi pu appliquer le Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne).*