On considère un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sur cet espace, on définit deux types de convergence :

— *on dit que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge fortement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0$$

(il s'agit de la convergence au sens habituel) ;

— *on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque*

$$\forall\, y \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, y\rangle = 0.$$

1❧ *Démontrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.*

2❧ *Démontrer que la convergence forte implique la convergence faible.*

3❧ *Démontrer que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\ell \in E$ si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

4❧ *En déduire que : si E est un espace euclidien, alors les deux notions de convergence sont équivalentes.*

1❧ On suppose que, quel que soit le vecteur $y \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell_1 \,|\, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell_2 \,|\, y\rangle = 0.$$

Par linéarité à gauche,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle x_n - \ell_1 \,|\, y\rangle - \langle x_n - \ell_2 \,|\, y\rangle = \langle \ell_2 - \ell_1 \,|\, y\rangle$$

et donc

$$\forall\, y \in E, \quad \langle \ell_2 - \ell_1 \,|\, y\rangle = 0.$$

Dans un espace préhilbertien, le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, donc $\ell_2 = \ell_1$.

2❧ On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, y \in E, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle x_n - \ell \,|\, y\rangle\big| \leqslant \|x_n - \ell\|\,\|y\|$$

donc, par encadrement,

$$\forall\, y \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, y\rangle = 0.$$

3❧ Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ, on vient de prouver qu'elle converge aussi faiblement vers ℓ et le cours nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ. Alors, pour $y = \ell \in E$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, \ell\rangle = 0$$

c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n \mid \ell \rangle = \|\ell\|^2.$$
Par ailleurs, si $\|x_n\|$ converge vers $\|\ell\|$, alors
$$\begin{aligned}\|\ell - x_n\|^2 &= \|\ell\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle \ell \mid x_n \rangle \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|^2 + \|\ell\|^2 - 2\|\ell\|^2 = 0\end{aligned}$$
ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

$\boxed{4}$ Si E est un espace euclidien, il admet une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$.

Si la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\ell \in E$, alors en particulier
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \mid e_k \rangle = 0.$$
Mais puisque la base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est ORTHONORMÉE,
$$\|x_n - \ell\|^2 = \sum_{k=1}^{d} \langle x_n - \ell \mid e_k \rangle^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

Il n'y a donc pas de différence entre *convergence forte* et *convergence faible* en dimension finie.

✍ *Si $E = \mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire, on peut considérer la base orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt.*

L'inégalité de Bessel (variante moderne du Théorème de Pythagore) nous dit que
$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \langle x \mid e_k \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$
et en particulier que
$$\forall\, x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x \mid e_k \rangle = 0.$$
Cela signifie que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers le vecteur nul.

Comme il s'agit d'une suite de vecteurs unitaires *et que le vecteur nul n'est pas unitaire, la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers le vecteur nul. Nous venons ainsi de prouver que les deux notions de convergence diffèrent en dimension infinie.*

(Autre bizarrerie : la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, alors même qu'elle est bornée...)