

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Pour tout $P \in E$, on pose également

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(t) dt.$$

1.♣ Démontrer que φ est une forme linéaire sur E . Déterminer son rang et démontrer que

$$(\text{Ker } \varphi)^\perp = \mathbb{R}_0[X].$$

2.♣ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, démontrer que l'application g_α définie par

$$\forall P \in E, \quad g_\alpha(P) = P + 2\alpha\varphi(P)$$

est un endomorphisme auto-adjoint de E .

3.♣ Calculer la matrice de g_α relative à la base canonique de E dans le cas $n = 3$. Cet endomorphisme est-il inversible ?

4.♣ On se restreint au cas $n = 3$. Démontrer que l'application f_α définie par

$$\forall P \in E, \quad f_\alpha(P) = P + 2\alpha\varphi(P).X$$

est un endomorphisme de E . Calculer la matrice de f_α relative à la base canonique de E . Cet endomorphisme est-il inversible ? Est-il auto-adjoint ?

1.♣ On peut se contenter de remarquer que

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \int_{-1}^1 1 \cdot P(t) dt = \langle 1 | P \rangle.$$

Cela prouve que φ est bien une application de E dans \mathbb{R} et, par bilinéarité du produit scalaire, φ est une forme linéaire sur E .

♣ En particulier, $\varphi(1) = 2 \neq 0$, donc la forme linéaire φ n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, elle est surjective :

$$\text{Im } \varphi = \mathbb{R}, \quad \text{rg } \varphi = 1$$

et son noyau est un hyperplan de E .

Puisque nous avons déjà, de fait, appliqué le Théorème de représentation de Riesz, il est clair que

$$\text{Ker } \varphi = (\mathbb{R} \cdot 1)^\perp.$$

Comme E est un espace de dimension **finie**,

$$(\text{Ker } \varphi)^\perp = \mathbb{R} \cdot 1 = \mathbb{R}_0[X].$$

2.♣ Comme φ est une forme linéaire, on peut considérer que φ est à valeurs dans le sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants et donc aussi à valeurs dans E .

Dans ces conditions,

$$f_\alpha = I_E + 2\alpha\varphi$$

est un endomorphisme de E (en tant que combinaison linéaire de deux endomorphismes).

• Quels que soient les polynômes P et Q , par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha(P) | Q \rangle &= \langle P | Q \rangle + 2\alpha\varphi(P) \langle 1 | Q \rangle \\ &= \langle P | Q \rangle + 2\alpha\varphi(P)\varphi(Q) \\ &= \langle P | Q + 2\alpha\varphi(Q) \rangle = \langle P | g_\alpha(Q) \rangle\end{aligned}$$

donc g_α est un endomorphisme auto-adjoint.

3• Dans le cas particulier $n = 3$,

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 0, \quad \varphi(X^2) = 2/3, \quad \varphi(X^3) = 0$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(g_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha & 0 & 4\alpha/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, donc elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0. Ainsi, l'endomorphisme g_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1/4$.

• Dans le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$), comme g_α est un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie, g_α est inversible si, et seulement si, il est injectif.

Il est clair que le noyau de g_α est contenu dans $\mathbb{R}_0[X]$:

$$g_\alpha(P) = P + 2\alpha\varphi(P) = 0 \implies P = -2\alpha\varphi(P) \in \mathbb{R}_0[X].$$

Comme $g_\alpha(1) = 1 + 4\alpha$, la condition est la même : l'endomorphisme g_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1/4$.

• On ne doit pas s'étonner que la matrice de g_α ne soit pas symétrique alors que l'endomorphisme g_α est auto-adjoint. En effet, le lien entre les endomorphismes auto-adjoints et les matrices symétriques n'existe QUE DANS LES BASES ORTHONORMÉES et la base canonique n'est pas une base orthonormée, même pas une base orthogonale :

$$\langle 1 | X^2 \rangle = 2/3, \quad \langle X | X^3 \rangle = 2/5.$$

4• Comme φ est une forme linéaire, l'application

$$[P \mapsto 2\alpha\varphi(P) \cdot X]$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $n \geq 1$, l'application f_α est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pas seulement pour $n = 3$).

• D'après les calculs précédents,

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4\alpha & 1 & 4\alpha/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• On reconnaît une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 4\alpha & 1 & * & * \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc f_α est inversible si, et seulement si, les deux blocs diagonaux sont inversibles.

Comme les deux blocs diagonaux sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous différents de 0, c'est bien le cas : l'endomorphisme f_α est inversible.

• Comme on l'a remarqué plus haut, il ne suffit pas de constater que la matrice de g_α n'est pas symétrique pour en déduire que l'endomorphisme g_α n'est pas auto-adjoint (puisque la base canonique n'est pas une base orthonormée).

Quels que soient P et Q,

$$\begin{aligned}\langle f_\alpha(P) | Q \rangle &= \langle P | Q \rangle + 2\alpha \langle 1 | P \rangle \langle X | Q \rangle \\ &\stackrel{?}{=} \langle P | Q \rangle + 2\alpha \langle X | P \rangle \langle 1 | Q \rangle = \langle P | f_\alpha(Q) \rangle.\end{aligned}$$

Si f_α est auto-adjoint, alors en particulier (pour $P = 1$ et $Q = X$) :

$$2\alpha \langle 1 | 1 \rangle \langle X | X \rangle = 2\alpha \langle 1 | X \rangle \langle 1 | X \rangle.$$

Si $\alpha = 0$, alors $g_\alpha = I_E$ est évidemment auto-adjoint!

Si $\alpha \neq 0$, alors il faut que

$$|\langle 1 | X \rangle| = \|1\| \|X\|$$

et donc que les vecteurs 1 et X soient colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz), ce qui est faux!

L'endomorphisme f_α est donc auto-adjoint si, et seulement si, $\alpha = 0$.

▮ On peut répondre de manière plus savante...

Comme la matrice canonique est triangulaire par blocs et que les blocs diagonaux sont eux-mêmes triangulaires, les valeurs propres de f_α sont les coefficients diagonaux de la matrice. Le spectre de f_α est donc réduit à $\{1\}$.

D'après le Théorème spectral, si f_α est auto-adjoint, alors cet endomorphisme est diagonalisable.

Mais un endomorphisme diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie, donc : si f_α est auto-adjoint, alors $f_\alpha = I_E$ et donc $\alpha = 0$.