Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Quels que soient* P *et* Q *dans* $E = \mathbb{R}_n[X]$, *on pose*

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1).$$

1❧ *Démontrer que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un produit scalaire sur* E.

2❧ *Démontrer que*

$$F = \{P \in E \; : \; P(1) = 0\}$$

est un sous-espace de E *et préciser sa dimension.*

3❧ *Calculer la distance* $d(1, F)$.

1❧ Comme P et Q sont des polynômes, on peut les assimiler à des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\langle P \mid Q \rangle$ est bien défini.

Il est clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Quel que soit le polynôme P,

$$\langle P \mid P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \big(P^{(k)}(1)\big)^2 \geqslant 0$$

en tant que somme de réels positifs et donc

$$\langle P \mid P \rangle = 0 \iff \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P^{(k)}(1) = 0.$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes de degré inférieur à n,

$$\forall\, P \in E, \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} \cdot (X-1)^k.$$

Donc $\langle P \mid P \rangle = 0$ équivaut à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc définie positive.

Autrement dit, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2❧ On peut remarquer que

$$P \in F \iff \langle P \mid 1 \rangle = 0.$$

En effet, avec $Q = 1$, on a $Q^{(0)}(1) = 1$ et $Q^{(k)}(1) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

L'ensemble F est donc un sous-espace de E en tant que noyau de l'application linéaire

$$[P \mapsto \langle P \mid 1 \rangle].$$

Plus précisément, comme cette application linéaire est une forme linéaire non identiquement nulle (puisque $\langle 1 \mid 1 \rangle = 1 \neq 0$), le sous-espace F est un hyperplan de E et donc

$$\dim F = \dim E - 1 = n.$$

3❧ Comme E est un espace euclidien (dimension FINIE !), on déduit de la question précédente que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R} \cdot 1).$$

Comme le projeté orthogonal du monôme 1 sur le sous-espace F est le vecteur nul, le cours nous dit que

$$d(1, F) = \|1 - 0\| = \|1\| = 1.$$

✍ *Pour un polynôme quelconque* $P \in E$, *le projeté orthogonal de* P *sur la droite* $F^{\perp}$ *est le polynôme constant*

$$\frac{\langle\, P \,|\, 1 \,\rangle}{\langle\, 1 \,|\, 1 \,\rangle} \cdot 1 = P(1),$$

donc

$$P = \underbrace{\big(P - P(1)\big)}_{\in F} + \underbrace{P(1)}_{\in F^{\perp}}.$$

Dans ce cas,

$$d(P, F) = \big\|P(1)\big\| = \big|P(1)\big| \, \|1\| = \big|P(1)\big|.$$