> *L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur le plan*
>
> $$H = [x - 2y + z = 0].$$

✍ *Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien, la projection orthogonale sur un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^3$ est bien définie.*

Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le vecteur

$$\mathbf{u} = (1, -2, 1)$$

est un vecteur orthogonal au plan H :

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in H \iff \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{u} \rangle = 0$$

et par conséquent

$$\mathbb{R}^3 = H \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u})^\perp.$$

D'après le cours, le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sur la droite $\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ est le vecteur

$$\frac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle} \cdot \mathbf{u} = \frac{x - 2y + z}{6} \cdot (1, -2, 1)$$

et le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x}$ sur le plan H est donc le vecteur

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{x - 2y + z}{6} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{6} \cdot (5x + 2y - z,\ 2x + 2y + 2z,\ -x + 2y + 5z).$$

La matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur H est donc

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

✍ *On remarque que cette matrice est symétrique, ce qui est normal (une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint et, ici, la base dans laquelle on le représente est bien une base orthonormée).*

On constate également que la trace de la matrice est égale à 2, ce qui est bien la dimension du sous-espace H sur lequel on projette.

Il est un peu plus long de vérifier que les colonnes appartiennent au sous-espace H et que le vecteur $\mathbf{u}$ appartient au noyau (puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$).

Ces vérifications simples servent à nous donner confiance dans le résultat des calculs (ou éventuellement à détecter une erreur de calcul).