Soient E, un espace euclidien de dimension n et v, un vecteur non nul de E.

1❧ *Si les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, alors il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que*

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2❧ *La base $\mathscr{C}$ peut-elle être choisie orthogonale ? orthonormée ?*

1❧ Comme $v \neq 0_E$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B} = (v, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

(Théorème de la base incomplète appliqué à la famille libre (v)).

De même, comme la colonne

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

n'est pas la colonne nulle, il existe une matrice inversible Q de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est inversible, il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = Q^{-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathfrak{Mat}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) = Q.$$

Par définition de la matrice de passage, la première colonne de Q donne les coordonnées du premier vecteur de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$, donc

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2❧ D'après le Théorème de la base orthonormée incomplète, on peut supposer dans ce qui précède que les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases orthogonales : les familles libres (v) et (C_1) étant orthogonales, on peut les compléter en bases orthogonales.

❧ Si on exige que la base $\mathscr{C}$ soit une base orthonormée, il faut alors que

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Cette condition nécessaire est aussi une condition suffisante : en effet, si

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

alors les familles

$$\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{C_1}{\|v\|}\right)$$

sont des familles orthonormées et le Théorème de la base orthonormée incomplète nous assure qu'il existe une base orthonormée de la forme

$$\mathscr{B}' = \left(\frac{v}{\|v\|}, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'\right)$$

et une matrice orthogonale de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1/\|v\| & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n/\|v\| & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est orthogonale et que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée, il existe donc une base orthonormée $\mathscr{C}' = (e'_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{C}') = Q^{-1} = Q^\top \in O_n(\mathbb{R}).$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\frac{v}{\|v\|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\|v\|} \cdot e'_k$$

et donc que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e'_k.$$