Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

où les a_k sont des réels deux à deux distincts.

1❧ *Démontrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.*

2❧ *Démontrer que l'ensemble*

$$F = \Big\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;:\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \Big\}$$

est un sous-espace de E. Préciser sa dimension et déterminer son orthogonal.

3❧ *Calculer la distance du monôme X^n à F.*

1❧ Il est clair que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une application bilinéaire et symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $P \in E$,

$$\langle\, P \,|\, P \,\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$$

puisqu'il s'agit d'une somme de carrés et, par conséquent,

$$\langle\, P \,|\, P \,\rangle = 0 \iff \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P(a_k) = 0.$$

Or P est un polynôme de degré inférieur à n (par définition de E) et $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de $(n+1)$ réels deux à deux distincts. Comme P admet donc au moins $(n+1)$ racines distinctes, c'est le polynôme nul. Ainsi l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur E.

2❧ On peut se contenter de remarquer que

$$P \in F \iff \sum_{k=1}^{n} 1 \times P(a_k) = 0$$

c'est-à-dire

$$F = 1^{\perp}.$$

Ainsi, l'ensemble F est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace de E de dimension $(n+1) - 1 = n$.

Comme E est un espace de dimension finie,

$$F^{\perp} = \big[(\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}\big]^{\perp} = \mathbb{R} \cdot 1.$$

3❧ Soit π, la projection orthogonale sur F (qui est bien définie, puisque E est un espace euclidien). D'après le cours, la distance du vecteur X^n au sous-espace F est égale à la norme du vecteur $X^n - \pi(X^n)$, qui est aussi le projeté orthogonal du vecteur X^n sur le sous-espace $F^{\perp} = \mathbb{R} \cdot 1$.

D'après le cours,

$$X^n - \pi(X^n) = \frac{\langle\, X^n \,|\, 1 \,\rangle}{\langle\, 1 \,|\, 1 \,\rangle} \cdot 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n$$

et, par homogénéité de la norme,

$$d(X^n, F) = \Big| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k^n \Big| \cdot \|1\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \Big|.$$

✍ *Plus généralement, la distance du polynôme* P *au sous-espace* F *est égale à*

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \left| \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \right|$$

et on constate que cette distance est bien nulle si, et seulement si, le polynôme P *appartient au sous-espace* F *(ce qui est toujours vrai dans un espace euclidien, mais pas toujours dans un espace préhilbertien).*