> $\boxed{1❧}$ *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée*
>
> $$I_\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$$
>
> *est-elle convergente ?*
> $\boxed{2❧}$ *Trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$, puis démontrer que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
> $\boxed{3❧}$ *Démontrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par*
>
> $$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$
>
> *est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.*
> $\boxed{4❧}$ *Vérifier que l'application $\varphi$ définie par*
>
> $$\forall\, P \in E, \quad \varphi(P) = XP'' + (1-X)P'$$
>
> *est un endomorphisme de $E$.*
> $\boxed{5❧}$ *Vérifier que*
>
> $$\forall\, P, Q \in E, \quad \big\langle \varphi(P) \,\big|\, Q \big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt.$$
>
> *En déduire que l'endomorphisme $\varphi$ est auto-adjoint.*

$\boxed{1❧}$ Pour tout réel $\alpha$, la fonction

$$f_\alpha = \big[t \mapsto t^\alpha e^{-t}\big]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

Lorsque $t$ tend vers $0$,

$$f_\alpha(t) \sim t^\alpha.$$

On sait que la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est intégrable au voisinage de $0$ si, et seulement si, $\alpha > -1$. Donc $f_\alpha$ est intégrable au voisinage de $0$ si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$,

$$f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2}).$$

On sait que la fonction $\big[t \mapsto e^{-t/2}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc la fonction $f_\alpha$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $f_\alpha$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > -1$ (et en particulier pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$).

$\boxed{2❧}$ Les expressions

$$f'(t)g(t) = (n+1)t^n \cdot (-e^{-t}) \quad \text{et} \quad f(t)g'(t) = t^{n+1} \cdot e^{-t}$$

sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et le produit

$$f(t)g(t) = t^{n+1} \cdot (-e^{-t})$$

tend vers une limite finie (nulle !) lorsque $t$ tend vers $0$ et lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

✍ *Si on est vraiment décidé à bien travailler, il n'est pas difficile de vérifier avec soin et rigueur les conditions d'application de la formule d'intégration par parties : il suffit de prendre le temps de poser les calculs au brouillon...*

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} (n+1)t^n \cdot (-e^{-t})\,dt = \lim_{t\to+\infty} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \lim_{t\to 0} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \int_0^{+\infty} t^{n+1} \cdot e^{-t}\,dt$$

c'est-à-dire

$$-(n+1)I_n = -I_{n+1}.$$

Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1,$$

on en déduit par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

**3❧** Quels que soient les polynômes $P$ et $Q$ dans $E$, la fonction

$$\big[t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}\big]$$

est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(t)Q(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^n)$$

donc, d'après la première question, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

est (absolument) convergente.

L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est donc bien définie sur $E \times E$. Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire et symétrique.

Quel que soit le polynôme $P \in E$,

$$\langle P | P \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\,dt \geqslant 0$$

(intégration bornes croissantes d'une fonction intégrable et positive).

Comme la fonction $\big[t \mapsto P(t)^2 e^{-t}\big]$ est **continue** et positive, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad P(t)^2 e^{-t} = 0,$$

donc que

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad P(t) = 0$$

(puisque la fonction exp ne s'annule pas) et donc que $P$ est bien le polynôme nul (le seul polynôme admettant une infinité de racines).

Donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $E$.

**4❧** Pour tout $P \in E$, il est clair que

$$\varphi(P) = XP'' + (1-X)P'$$

est un polynôme. On vérifie sans peine que, quels que soient les polynômes $P$ et $Q$, quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda\big[XP'' + (1-X)P'\big] + \big[Q'' + (1-X)Q'\big] \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\varphi$ est bien un endomorphisme de $E$.

**5❧** Nous allons à nouveau intégrer par parties. Toujours d'après la première question, les expressions

$$f'(t)g(t) = \big[tP''(t) + (1-t)P'(t)\big]e^{-t} \cdot Q(t)$$

et

$$f(t)g'(t) = \left[tP'(t)e^{-t}\right] \cdot Q'(t)$$

sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et il est clair que le produit

$$f(t)g(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t}$$

tend vers une limite finie (nulle...) lorsque $t$ tend vers $0$ et lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$\langle\, \varphi(P) \,|\, Q \,\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt.$$

✍ *On a trouvé une expression* symétrique *en fonction de* $P$ *et* $Q$.

❧ Une nouvelle intégration par parties avec

$$f(t) = P(t) \quad \text{et} \quad g(t) = tQ'(t)e^{-t}$$

nous donne alors

$$\langle\, \varphi(P) \,|\, Q \,\rangle = (-1)^2 \langle\, P \,|\, \varphi(Q) \,\rangle.$$

✍ *Inutile d'entrer dans les détails : c'est essentiellement la même chose. Le simple fait d'expliciter les fonctions* $f$ *et* $g$ *montre qu'on sait parfaitement de quoi il retourne — et qu'on ne cherche pas à faire illusion.*

L'endomorphisme $\varphi$ admet donc un adjoint, qui est égal à $\varphi$ lui-même.

✍ *Dans un espace euclidien (dimension* finie*), tout endomorphisme admet un adjoint.*

*En revanche, dans un espace préhilbertien de dimension* infinie*, il n'est pas sûr qu'un endomorphisme admette un adjoint. C'est pour cette raison que je rédige ainsi la conclusion.*