Soient a*, un vecteur non nul de* E *et* k*, un réel non nul.*
1❧ *Démontrer que l'endomorphisme défini par*

$$\forall\, x \in E, \quad f_k(x) = x + k\langle\, a \,|\, x\,\rangle\ a$$

est auto-adjoint. Exprimer cet endomorphisme à l'aide de I_E *et de la projection orthogonale* π *sur la droite* $\mathbb{R}\cdot a$*.*
2❧ *À quelle condition sur* $k \in \mathbb{R}$ *l'endomorphisme* f_k *est-il une isométrie ?*

1❧ Par linéarité à droite du produit scalaire, il est clair que f_k est un endomorphisme de E.

Quels que soient les vecteurs x et y,

$$\begin{aligned}\big\langle\, f_k(x) \,\big|\, y\,\big\rangle &= \langle\, x \,|\, y\,\rangle + k\langle\, a \,|\, x\,\rangle\ \langle\, a \,|\, y\,\rangle \\ &= \langle\, x \,|\, y\,\rangle + k\langle\, a \,|\, y\,\rangle\ \langle\, x \,|\, a\,\rangle = \big\langle\, x \,\big|\, f_k(y)\,\big\rangle\end{aligned}$$

donc l'endomorphisme f_k est auto-adjoint.

❧ Comme le vecteur a n'est pas nul, la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\cdot a$ s'exprime par

$$\forall\, x \in E, \qquad \pi(x) = \frac{\langle\, a \,|\, x\,\rangle}{\langle\, a \,|\, a\,\rangle}\ a$$

donc

$$f_k = I_E + k\|a\|^2 \cdot \pi.$$

✍ *D'après le cours, toute projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint (en particulier l'identité !) et l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace de* $L(E)$*. La décomposition de* f_k *prouve donc à nouveau que* f_k *est auto-adjoint.*

2❧ L'endomorphisme f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|f_k(x)\big\|^2 = \|x\|^2.$$

Or, pour tout $x \in E$,

$$\big\|x + k\langle\, a \,|\, x\,\rangle\ a\big\|^2 = \|x\|^2 + 2k\langle\, a \,|\, x\,\rangle \cdot \langle\, a \,|\, x\,\rangle + k^2\langle\, a \,|\, x\,\rangle^2 \cdot \|a\|^2.$$

Comme $k \neq 0$, on en déduit que f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, a \,|\, x\,\rangle^2\big[2 + k\|a\|^2\big] = 0.$$

Comme $a \neq 0_E$, cela équivaut à

$$2 + k\|a\|^2 = 0.$$

L'endomorphisme f_k est donc une isométrie si, et seulement si,

$$k = \frac{-2}{\|a\|^2}.$$

✍ *Dans ce cas, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$f_k(x) = x - 2\frac{\langle\, a \,|\, x\,\rangle}{\|a\|^2} \cdot a = x - 2\pi(x).$$

On reconnaît ici la réflexion d'hyperplan $H = (\mathbb{R}\cdot a)^\perp$*, qui est effectivement une isométrie comme chacun sait.*

✍ *L'énoncé exclut a priori le cas* $k = 0$*, pour lequel* $f_k = I_E$ *serait aussi une isométrie.*