1❧ *Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Préciser le degré de T_n.

2❧ *Démontrer que l'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ définie par*

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

3❧ *Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E pour ce produit scalaire. S'agit-il d'une base orthonormée ?*

1❧ Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe deux polynômes P et Q tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(\cos x) = \cos nx = Q(\cos x),$$

alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (P - Q)(\cos x) = 0.$$

Comme cos est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\forall\, u \in [-1, 1], \quad (P - Q)(u) = 0.$$

Comme le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, on en déduit que $P = Q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc *au plus un* polynôme T_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

❧ Il est clair que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos 0x = 1 \quad \text{et} \quad \cos 1x = \cos x.$$

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, il existe deux polynômes T_n et T_{n-1} tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx \quad \text{et} \quad T_{n-1}(\cos x) = \cos(n-1)x.$$

D'après les formules d'addition, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2\cos x \cos nx = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x$$

donc

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\, T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x).$$

Cela prouve que le polynôme

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

vérifie bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un (unique !) polynôme T_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

On a en particulier établi la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

❧ On sait déjà que $\deg T_0 = 0$ et que $\deg T_1 = 1$.

En supposant que $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n-1} = n-1$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit de la relation de récurrence que

$$T_{n+1} = \underbrace{2XT_n}_{n+1} - \underbrace{T_{n-1}}_{n-1}$$

et donc que

$$\deg T_{n+1} = n+1.$$

On a démontré par récurrence que $\deg T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *On aura reconnu les polynômes de Tchebychev.*

2❧ La fonction

$$f_0 = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$. En tant que dérivée de la fonction Arcsin, qui est continue sur le segment $[-1, 1]$, la fonction f_0 admet une primitive qui tend vers une limite finie aussi bien au voisinage de -1 qu'au voisinage de 1. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente.

Comme la fonction f_0 est positive sur $]-1, 1[$, on en déduit que f_0 est intégrable sur $]-1, 1[$.

Le produit PQ est continu sur le segment $[-1, 1]$ (fonction polynomiale !), donc il est borné.

En tant que produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée, l'expression

$$\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

est intégrable sur $]-1, 1[$, donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Il est clair que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive (intégration bornes croissantes d'une fonction positive).

Si $\langle P | P \rangle = 0$, alors

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0.$$

On intègre ici une fonction *positive* et *continue* sur $]-1, 1[$, et l'intégrale est nulle, donc

$$\forall\, t \in]-1, 1[, \qquad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

On en déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$ et donc que $P = 0_E$ (seul le polynôme nul admet une infinité de racines).

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3❧ Tout d'abord, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ puisqu'elle est échelonnée en degré au sens où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \deg T_n = n.$$

❧ On sait que la fonction $\varphi = \text{Arccos}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ (et décroissante) de l'intervalle $]0, \pi[$ sur l'intervalle $]-1, 1[$, que

$$\forall\, t \in]-1, 1[, \quad \cos \varphi(t) = \cos \text{Arccos}\, t = t$$

et que

$$\forall\, t \in]-1, 1[, \quad \text{Arccos}'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

❧ Soient P et Q, deux polynômes fixés. On sait que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P\big(\cos\underbrace{[\varphi(t)]}_{\theta}\big)Q\big(\cos[\varphi(t)]\big)\cdot\big|\varphi'(t)\big|\right]$$

est intégrable sur $]-1,1[$. On déduit du Théorème de changement de variable que la fonction

$$[\theta \mapsto P(\cos\theta)Q(\cos\theta)]$$

est intégrable sur $]0,\pi[$ (ce n'est pas une surprise : il s'agit ici d'une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$!) et que

$$\int_{]0,\pi[} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta = \int_{]-1,1[} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Autrement dit, quels que soient les polynômes P et Q,

$$\langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta.$$

❧ En particulier, pour $0 \leqslant m < n$,

$$\begin{aligned}\langle\, T_m \,|\, T_n \,\rangle &= \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\,d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque les pulsations $(n+m)$ et $(n-m)$ sont strictement positives.

Cela prouve que la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une base orthogonale.

❧ Pour $m = n \geqslant 1$, on a cette fois

$$\langle\, T_n \,|\, T_n \,\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 + \cos 2n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\langle\, T_0 \,|\, T_0 \,\rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Donc la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base orthonormée.