Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2022/2023

Composition de Mathématiques

Le 5 octobre 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On note I*, l'intervalle* $[0, +\infty[$ *et* E*, l'espace vectoriel réel des fonctions continues et bornées sur* I*. On fixe un réel* a *strictement positif et, pour toute fonction* $f \in E$*, on définit la fonction* $U(f) : I \to \mathbb{R}$ *par*

$$\forall\, x \in I, \quad U(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$$

ainsi que la quantité

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

dite ***norme uniforme de*** f ***sur*** I.

1. Soit $f \in E$.

1. a. Démontrer que la fonction $U(f)$ est bien définie sur l'intervalle I, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

1. b. Démontrer que $U(f)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y'(x) - ay(x) = -f(x) \qquad (E_f)$$

qui soit bornée sur I.

2. Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$ la fonction

$$f_b = \left[t \mapsto e^{-bt}\right]$$

appartient-elle à E ? Vérifier que, si f_b appartient à E, alors $U(f_b)$ est proportionnelle à f_b.

3. Démontrer que U est un endomorphisme de E et que

$$\forall\, f \in E, \quad \|U(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\|f\|_\infty.$$

Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

4. Justifier l'existence de la borne supérieure

$$\sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|U(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et calculer sa valeur. Cette borne supérieure est-elle un maximum ?

5. Justifier l'existence de la borne inférieure

$$\inf_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|U(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et démontrer qu'elle est nulle. Cette borne inférieure est-elle un minimum ?

❖ II – Problème ❖

Partie A.

Soit $\sum u_n$*, une série réelle dont le terme général est strictement positif. On suppose que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

On note R_n*, le reste d'ordre* n *de la série* $\sum u_n$.

2. Rappeler la définition de R_n.

3. Que vaut $R_n - u_{n+1}$?

4. Soit $0 < \varepsilon < 1/2$.

4. a. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad u_{k+1} \leqslant \varepsilon . u_k$$

puis que

$$\forall\, n \geqslant N_0,\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} \leqslant \varepsilon^p . u_n.$$

4. b. En déduire que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant R_n \leqslant 2\varepsilon \cdot u_n.$$

5. Démontrer que $R_n \sim u_{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les hypothèses faites au début de cette partie.

Partie B.

On étudie une série $\sum u_n$ *avec* $u_n = f(n)$*, où* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *à valeurs strictement positives telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

7. Soit $A > 0$.

7. a. Justifier l'existence d'un entier N_0 tel que

$$\forall\, x \geqslant N_0, \quad f'(x) \leqslant -A.f(x).$$

7. b. En déduire que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 < \frac{f(n+1)}{f(n)} \leqslant e^{-A}.$$

8. Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente et que son reste vérifie la relation suivante.

$$R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_{n+1}$$

Partie C.

Dans cette partie, on considère une série réelle $\sum u_n$ dont le terme général est strictement positif.
On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente, si bien que les sommes partielles S_n, la somme S et les restes R_n sont bien définis.
On se donne pour objectif d'étudier la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$$

en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

9. Quelle est la limite de la suite de terme général R_n^{α} ?
10. On suppose que $0 < \alpha < 1$.
10. a. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}} \leqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^{\alpha}}.$$

10. b. En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$ est convergente.
11. a. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{R_n} \geqslant \ln \frac{R_{n-1}}{R_n}.$$

11. b. En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ est divergente.
12. On suppose que $\alpha > 1$ et que la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

est divergente. Que dire de la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$?

Nous allons maintenant démontrer que la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

est bien divergente.

13. On suppose maintenant que la suite de terme général u_n/R_{n-1} tend vers 0. Expliquer pourquoi cette hypothèse n'est pas restrictive.
14. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{R_n} = 0.$$

15. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_n} - \frac{u_n}{R_{n-1}} \leqslant \left(\frac{u_n}{R_n}\right)^2.$$

16. En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge, puis que la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$$

diverge pour tout $\alpha \geqslant 1$.

Partie D.

On étudie ici l'ordre de grandeur de u_n/R_{n-1} pour différents exemples de séries.

17. Pour $0 < q < 1$, on pose ici

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

Calculer un équivalent de $\frac{u_n}{R_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
18. Pour $\beta > 1$, on pose ici

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^{\beta}}.$$

Donner un équivalent simple de $\frac{u_n}{R_n}$.
19. On considère la série de terme général

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

En comparant une somme et une intégrale, démontrer que

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

20. On pose ici

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n!}.$$

Démontrer que

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

21. Commenter ces exemples à la lumière des résultats établis précédemment.

Solution I ❀ Solutions bornées d'une équation différentielle

1. a. La fonction f est continue sur $I = [0, +\infty[$, donc la fonction
$$F_a = \left[t \mapsto f(t)e^{-at}\right]$$
est continue sur I. D'autre part, f est bornée sur I, donc
$$f(t)e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-at}).$$
Comme $a > 0$, la fonction $[t \mapsto e^{-at}]$ est une fonction intégrable (de référence) sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Par comparaison, la fonction F_a est intégrable sur I et, par restriction, elle est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in I$. La fonction $U(f)$ est donc bien définie sur I.

❧ Comme F_a est intégrable sur $I = [0, +\infty[$, alors l'intégrale généralisée
$$\int_x^{+\infty} F_a(t)\,dt$$
est convergente pour tout $x \in I$ et comme F_a est continue sur I, on déduit du Théorème fondamental généralisé que la fonction
$$\left[x \mapsto \int_x^{+\infty} F_a(t)\,dt\right]$$
est une primitive de $-F_a$ sur I. Il s'agit donc, en particulier, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

D'après la Formule de Leibniz (dérivation d'un produit de fonctions dérivables), la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned}[U(f)]'(x) &= ae^{ax}\int_x^{+\infty} F_a(t)\,dt + e^{ax}\big(-F_a(x)\big)\\ &= aU(f)(x) - e^{ax}F_a(x)\\ &= aU(f)(x) - f(x).\end{aligned}$$

1. b. On a montré à la question précédente que $U(f)$ était une solution sur I de l'équation différentielle (E_f).

❧ Comme la fonction F_a est intégrable sur I, on déduit de l'inégalité triangulaire que
$$\forall\, x \in I,\quad \big|U(f)(x)\big| \leqslant e^{ax}\int_x^{+\infty} \big|e^{-at}f(t)\big|\,dt.$$
La fonction f est bornée sur I et la borne supérieure est un majorant, donc
$$\forall\, t \in I,\quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$
et par conséquent,
$$\forall\, t \in I,\quad \big|e^{-at}f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-at}.$$
Par positivité de l'intégrale,
$$\forall\, x \in I,\quad \big|U(f)(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{\|f\|_\infty}{a},$$
donc la fonction $U(f)$ est bornée sur I et, par passage au sup,
$$\big\|U(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\|f\|_\infty.$$

❧ Soit $V(f)$, une solution de (E_f) bornée sur I. Alors $U(f) - V(f)$ est une fonction bornée sur I qui vérifie l'équation homogène
$$\forall\, x \in I,\quad y'(x) - ay(x) = 0.$$
La solution générale de cette équation homogène ayant pour expression
$$y(x) = Ae^{ax},$$
on en déduit que $A = 0$ et donc que $V(f) = U(f)$.

❧ La fonction $U(f)$ est donc bien l'unique solution de l'équation (E_f) qui soit bornée sur I.

2. La fonction f_b est continue pour tout $b \in \mathbb{R}$ et elle est bornée sur I si, et seulement si, $b \geqslant 0$. Donc $f_b \in E$ si, et seulement si, $b \in \mathbb{R}_+$.

❧ Pour tout $b \in \mathbb{R}_+$,
$$\forall\, x \in I,\quad U(f_b)(x) = e^{ax}\cdot\frac{e^{-(a+b)x}}{a+b} = \frac{e^{-bx}}{a+b}$$
c'est-à-dire
$$\forall\, b \in \mathbb{R}_+,\qquad U(f_b) = \frac{1}{a+b}\cdot f_b.$$

3. L'application $U(f)$ est bien définie pour tout $f \in E$, continue (car de classe $\mathscr{C}^1$) et bornée sur I d'après **1.b.**, donc elle appartient à E.

La linéarité de U est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions intégrables sur I.

L'application U est donc un endomorphisme de E.

❧ Si $U(f)$ est l'application nulle, l'équation (E_f) admet une solution identiquement nulle sur I, donc f est identiquement nulle sur I. L'endomorphisme U est donc injectif.

❧ Il existe évidemment des applications f continues et bornées sur I qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ (le signal triangle, par exemple), donc U n'est pas surjectif.

4. Si $f \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\|f\|_\infty > 0$ et d'après la question précédente,
$$\frac{\|U(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant \frac{1}{a}.$$
L'ensemble
$$Q = \left\{\frac{\|U(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty},\ f \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$
est donc une partie non vide (puisque $E \neq \{0_E\}$) et majorée de $\mathbb{R}$: elle admet une borne supérieure (Axiome de la borne supérieure) et comme la partie Q est majorée par $1/a$, alors
$$\sup Q \leqslant \frac{1}{a}.$$
D'après **[2.]**, en prenant $f_0 = \left[t \mapsto e^{-0t} = 1\right]$, on définit bien un vecteur non nul de E tel que $\|f_0\|_\infty = 1$ et que
$$U(f_0) = \frac{1}{a}\cdot f_0.$$
Par conséquent, $\|U(f_0)\|_\infty = 1/a$. Cela prouve d'une part que $\sup Q$ est égal à $1/a$ et d'autre part que cette borne supérieure est un maximum (c'est la valeur du quotient pour toute fonction constante non nulle).

5. L'ensemble Q est une partie non vide (cf question précédente) et minorée (par 0 !) de $\mathbb{R}$, donc elle admet effectivement une borne inférieure (Axiome de la borne supérieure).

❧ Il est clair que cette borne inférieure est positive.

Pour tout $b > 0$, la fonction f_b est un vecteur de E et

$$U(f_b) = \frac{1}{a+b} \cdot f_b.$$

Par conséquent, on a

$$\forall\, b > 0, \qquad \|f_b\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|U(f_b)\|_\infty = \frac{1}{a+b}.$$

Comme la borne inférieure est un minorant, on a donc

$$\forall\, b > 0, \qquad 0 \leqslant \inf Q \leqslant \frac{\|U(f_b)\|_\infty}{\|f_b\|_\infty} = \frac{1}{a+b}$$

et donc $\inf Q = 0$ (par passage à la borne inférieure en fonction du paramètre b).

❧ Si cette borne inférieure était un minimum, alors il existerait un vecteur non nul $g \in E$ tel que

$$\frac{\|U(g)\|_\infty}{\|g\|_\infty} = 0$$

et donc tel que $U(g) = 0_E$. On a justifié plus haut que U était un endomorphisme injectif, donc son noyau est réduit au vecteur nul. Ainsi, la borne inférieure de Q n'est pas un minimum.

Solution II ❀ Estimations du reste

Partie A.

1. La série $\sum u_n$ est une série dont le terme général est strictement positif.

La limite du quotient u_{n+1}/u_n étant strictement inférieure à 1, on déduit de la règle de D'Alembert que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2. Comme la série $\sum u_n$ est convergente, le reste R_n est par définition égal à

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n - u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - u_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k = R_{n+1}.$$

4. a. Comme le quotient u_{k+1}/u_k tend vers $\ell = 0$ et que $\varepsilon > \ell$, il existe un rang N_0 à partir duquel le quotient est majoré par ε :

$$\forall\, k \geqslant N_0, \qquad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \varepsilon.$$

Comme $u_k > 0$, on en déduit que

$$\forall\, k \geqslant N_0, \qquad u_{k+1} \leqslant \varepsilon.u_k.$$

❧ Fixons $n \geqslant N_0$.

Pour $p = 0$, on a évidemment $u_{n+p} \leqslant \varepsilon^0.u_n = u_n$.

(HR) Supposons qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+p} \leqslant \varepsilon^p.u_n$. On déduit alors de la majoration précédente (avec $k = n+p \geqslant n \geqslant N_0$) que

$$u_{n+(p+1)} = u_{(n+p)+1} \leqslant \varepsilon.u_{n+p}$$

et l'hypothèse de récurrence nous donne alors

$$u_{n+(p+1)} \leqslant \varepsilon.\varepsilon^p.u_n = \varepsilon^{(p+1)}.u_n.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant N_0$,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} \leqslant \varepsilon^p.u_n.$$

4. b. Tous les u_k sont positifs, donc $R_n \geqslant 0$.

Par sommation géométrique, pour tout $n \geqslant N_0$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \varepsilon^p\right) \cdot u_n = \frac{\varepsilon u_n}{1-\varepsilon}$$

et comme $0 < \varepsilon < 1/2$, alors $1 - \varepsilon > 1/2$, donc

$$\forall\, n \geqslant N_0, \qquad 0 \leqslant R_n \leqslant 2\varepsilon\, u_n.$$

5. D'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n+1}}{u_{n+1}} = 0$$

et d'après **[3.]**,

$$R_n = u_{n+1} + R_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} u_{n+1} + o(u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}.$$

6. Avec $u_n = 1/n!$, on a bien

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a donc démontré que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!},$$

relation paradoxale au sens où une somme comptant une infinité de termes est équivalente au premier terme de cette somme.

Partie B.

7. a. Par hypothèse, le quotient $f'(x)/f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Cela signifie que, pour tout seuil $-A < 0$, il existe une borne x_0 telle que

$$\forall\, x \geqslant x_0, \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -A.$$

Il suffit de choisir $N_0 \in \mathbb{N}$ supérieur à x_0 et de multiplier la relation précédente par $f(x) > 0$ pour conclure.

7. b. Soit $n \geqslant N_0$, un entier.

Comme $n \geqslant N_0$, le segment $[n, n+1]$ est contenu dans l'intervalle $[N_0, +\infty[$.

Comme f'/f est continue sur le segment $[n, n+1]$, on peut intégrer l'inégalité précédente :

$$\ell n \left| \frac{f(n+1)}{f(n)} \right| = \int_n^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \leqslant -A.$$

Comme exp est une fonction croissante et que f est une fonction strictement positive, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \qquad \frac{f(n+1)}{f(n)} \leqslant \exp(-A).$$

8. On a démontré l'encadrement précédent pour tout $A > 0$. Comme e^{-A} tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, on a en fait démontré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 0 < 1.$$

D'après **[1.]**, la série $\sum f(n)$ est absolument convergente et d'après **[5.]**,

$$R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_{n+1}$$

Partie C.

9. Par définition, R_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\alpha > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} R_n^\alpha = 0.$$

10. a. Comme le terme général u_n est strictement positif, les restes sont aussi strictement positifs et donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}.$$

On a aussi $R_{n-1} = R_n + u_n > R_n$ **[3.]**. Comme la fonction $[t \mapsto 1/t^\alpha]$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (puisque $\alpha > 0$),

$$\forall\, t \in [R_n, R_{n-1}], \qquad \frac{1}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{R_{n-1}^\alpha}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[R_n, R_{n-1}]$, on obtient

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{R_{n-1}^\alpha} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^\alpha} = \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}.$$

10. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, comme $\alpha \neq 1$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = v_n - v_{n-1}$$

en posant

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha} \cdot R_n^{1-\alpha}.$$

Or R_n tend vers 0 (puisque c'est un reste...) et $1 - \alpha > 0$, donc $R_n^{1-\alpha}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est donc convergente. Par conséquent, la série télescopique $\sum(v_n - v_{n-1})$ est convergente.

On a établi au **[10.a.]** que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha} \leqslant v_n - v_{n-1}.$$

D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$$

est donc convergente.

11. a. On reprend la même méthode avec $\alpha = 1$.

Comme la fonction $[t \mapsto 1/t]$ est décroissante,

$$\forall\, t \in [R_n, R_{n-1}], \quad \frac{1}{R_n} \geqslant \frac{1}{t}.$$

En intégrant sur $[R_n, R_{n-1}]$, on en déduit que

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} \geqslant \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} = \ell n \frac{R_{n-1}}{R_n}.$$

11. b. Comme $\sum u_n$ est une série de terme général strictement positif, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes est (strictement) décroissante et strictement positive. On déduit de la question précédente que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \ell n\, R_{n-1} - \ell n\, R_n \leqslant \frac{u_n}{R_n}.$$

Comme R_n tend vers 0 (par valeurs strictement positives), la suite de terme général $\ell n\, R_n$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, la série télescopique

$$\sum (\ell n\, R_{n-1} - \ell n\, R_n)$$

est une série divergente de terme général positif.

D'après le Théorème de comparaison des séries de terme général positif, la série $\sum u_n/R_n$ est donc divergente.

12. Comme la suite de terme général R_{n-1} tend vers 0, il existe un rang à partir duquel $0 < R_{n-1} \leqslant 1$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que

$$\exists\, N_0 \geqslant 1,\ \forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 < R_{n-1}^\alpha \leqslant R_{n-1} \leqslant 1.$$

Et comme $u_n > 0$,

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}} \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}.$$

Ici, on suppose que la série $\sum u_n/R_{n-1}$ est divergente. D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série $\sum u_n/R_{n-1}^\alpha$ est aussi divergente.

13. On cherche à prouver que la série $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Si le quotient u_n/R_{n-1} ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge grossièrement.

Il ne reste donc qu'à étudier le cas particulier où u_n/R_{n-1} tend vers 0 pour pouvoir conclure.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_n}{R_{n-1}} = \frac{u_n}{u_n + R_n} = \frac{1}{1 + \frac{R_n}{u_n}}.$$

Comme u_n/R_{n-1} tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que R_n/u_n tend vers l'infini et donc que u_n/R_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

15. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et positive. Donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{R_{n-1}} \leqslant \frac{u_n}{R_n}$$

et par conséquent

$$0 \leqslant \frac{u_n}{R_n} - \frac{u_n}{R_{n-1}} = \frac{u_n^2}{R_n.R_{n-1}} \leqslant \Big(\frac{u_n}{R_n}\Big)^2.$$

16. Comme u_n/R_n tend vers 0 d'après **[14.]**, l'encadrement précédent montre que

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{R_{n-1}} &= \frac{u_n}{R_n} - \Big(\frac{u_n}{R_n} - \frac{u_n}{R_{n-1}}\Big)\\ &= \frac{u_n}{R_n} + \mathcal{O}\Big[\Big(\frac{u_n}{R_n}\Big)^2\Big]\\ &= \frac{u_n}{R_n} + o\Big(\frac{u_n}{R_n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{R_n}.\end{aligned}$$

On a donc deux séries de termes généraux positifs ; ces termes généraux sont équivalents, donc les deux séries sont de même nature. D'après **[11.b.]**, la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ est divergente, donc la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

est divergente elle aussi.

❧ On déduit de **[10.b.]** et de **[12.]** (en tenant compte de **[13.]**) que la série

$$\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$$

est convergente si, et seulement si, $0 \leqslant \alpha < 1$.

Partie D.

17. Pour la série géométrique,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_n}{R_n} = \frac{1-q}{q}.$$

(Rappel : une suite constante est équivalente à la valeur de son terme général.)

18. On a démontré en cours que, pour toute série de Riemann convergente,

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1}\cdot\frac{1}{n^{\beta-1}}$$

(en comparant le reste à une intégrale). On en déduit que

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta-1}{n}.$$

19. La comparaison habituelle d'une somme et d'une intégrale (pour une fonction continue et décroissante) montre que d'une part que la série de Riemann $\sum u_n$ converge et d'autre part que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}.$$

Le changement de variable $u = \ln t$ donne alors

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$$

et donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}.$$

20. Comme u_{n+1}/u_n tend vers 0, on déduit de **[5.]** que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$$

et donc que

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

21. Pour ces quatre séries convergentes, on a constaté que la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ était à chaque fois divergente.

Cette série est même grossièrement divergente pour les exemples **[17.]** et **[20.]**.

On peut aussi remarquer que plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge rapidement vers 0, plus le quotient $\frac{u_n}{R_n}$ est grand.