Composition de Mathématiques

Le 9 novembre 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

On note E, *l'ensemble des applications* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *telles que l'intégrale généralisée*

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\, dt$$

converge.
On note F, *l'algèbre des applications polynomiales de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$. *On sait qu'on peut identifier* F *à l'algèbre* $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes à coefficients réels.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note*

$$\varepsilon_n = [x \mapsto x^n] \in E.$$

On rappelle que la famille $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* F.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note*

$$F_n = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n).$$

On peut identifier le sous-espace F_n *au sous-espace* $\mathbb{R}_n[X]$ *des polynômes dont le degré est inférieur à* n.

Partie A. Préliminaires

1. Soit $f \in E$. Démontrer que l'application

$$\left[t \mapsto f(t)^2 e^{-t}\right]$$

est intégrable sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

2. Démontrer que l'ensemble E contient l'algèbre F.

3. Soient f et g, deux éléments de E.

3. a. Vérifier que

$$\forall\, t \geqslant 0, \qquad \left|f(t)g(t)\right| \leqslant \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2}.$$

En déduire que l'application

$$\left[t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}\right]$$

est intégrable sur l'intervalle I.

3. b. Démontrer que E est un espace vectoriel.

On considère l'application $\mathscr{L}$ *définie par*

$$\forall\, P \in F, \quad \mathscr{L}(P) = \left[x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} P(xt)\, dt\right]. \qquad (1)$$

4. Vérifier que $\mathscr{L}$ est un endomorphisme de F.
☞ *On calculera* $\mathscr{L}(\varepsilon_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

5. Identifier le noyau et l'image de $\mathscr{L}$.

6. Soit

$$Q = \sum_{k=0}^{q} a_k \varepsilon_k \in F.$$

Résoudre l'équation $\mathscr{L}(P) = Q$ d'inconnue $P \in F$.

Partie B. Un produit scalaire sur E

Quelles que soient les applications f *et* g *dans* E, *on pose*

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\, dt.$$

7. Démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

La norme sur E *associée au produit scalaire* $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ *sera notée*

$$\|f\| = \sqrt{\langle\, f \,|\, f \,\rangle}.$$

8. Soit $f \in F$, une application polynomiale. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-t}\, dt. \qquad (2)$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, *on note*

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt.$$

9. Démontrer que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Démontrer qu'il existe une famille orthonormée $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* π_n, *la projection orthogonale sur le sous-espace* F_n.

11. Soit $f \in E$.

11. a. Rappeler (sans donner de justification) l'expression de $\pi_n(f)$ en fonction de f et des vecteurs u_k.

11. b. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\|f - \pi_n(f)\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle\, f \,|\, u_k \,\rangle^2. \qquad (3)$$

11. c. En déduire que la série $\sum \langle\, f \,|\, u_k \,\rangle^2$ est convergente.

11. d. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que la suite de terme général $\pi_n(f)$ converge vers le vecteur f.

Partie C. Une base orthonormée de F

> *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les applications*
> $$\varphi_n = \left[t \mapsto t^n e^{-t}\right] \in E$$
> *et*
> $$L_n = \left[t \mapsto e^t \varphi_n^{(n)}(t)\right] \in E.$$
> *On rappelle que, par convention,*
> $$\forall\, f \in E, \qquad f^{(0)} = f.$$

12. Expliciter L_0, L_1 et L_2.
13. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application L_n est une application polynomiale de degré n. Donner l'expression générale des coefficients de L_n et simplifier l'expression du coefficient dominant.
14. Calculer le développement limité à $o(t^{n+1})$ près de $\varphi_n(t)$ au voisinage de $t = 0$. En déduire que
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \varphi_n^{(k)}(0) = 0$$
ainsi que les valeurs de $\varphi_n^{(n)}(0)$ et de $\varphi_n^{(n+1)}(0)$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
15. a. Soit $f \in F$. Démontrer que
$$\langle\, L_n \,|\, f \,\rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t)\, dt \tag{4}$$
pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$.
☞ *On justifiera avec soin l'intégrabilité de $\varphi_n^{(n-k)} f^{(k)}$.*
15. b. En déduire que le vecteur L_n est orthogonal au sous-espace F_{n-1}.
16. Démontrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de F. En déduire une base orthonormée de F.

> *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on définit*
> $$f_a = \left[t \mapsto e^{-at}\right].$$

17. Soit $a \in \mathbb{R}_+$.
17. a. Vérifier que $f_a \in E$ et calculer $\|f_a\|^2$.
17. b. Démontrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \langle\, L_k \,|\, f_a \,\rangle = \frac{k!\, a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$
17. c. En déduire que la suite de terme général $\pi_n(f_a) \in F$ converge vers $f_a \in E$.

Partie D. Propriétés des polynômes de Laguerre

18. Relation de récurrence
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme
$$P_n = L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} \in F.$$
18. a. Démontrer que $P_n \in F_n$.
18. b. Démontrer que
$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \langle\, P_n \,|\, L_k \,\rangle = 0.$$
☞ *On pourra vérifier que* $XL_k \in F_n$ *pour* $0 \leqslant k < n$.
18. c. En déduire que
$$L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} + (n+1)^2 L_n = 0 \tag{5}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
19. Équation différentielle
Soit $n \in \mathbb{N}$.
19. a. Démontrer que
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad L_{n+1}(t) = tL_n'(t) + (n + 1 - t)L_n(t).$$
☞ *On pourra remarquer que $\varphi_{n+1}(t) = t\varphi_n(t)$.*
19. b. En déduire que L_n est une solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in]0, +\infty[, \quad tz''(t) + (1-t)z'(t) + nz(t) = 0. \tag{6}$$

20. Racines
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à démontrer que le polynôme L_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
20. a. Démontrer que
$$\int_0^{+\infty} L_n(t) e^{-t}\, dt = 0.$$
En déduire que L_n admet au moins une racine réelle strictement positive.

> *On note*
> $$0 < x_1 < \cdots < x_r,$$
> *les racines réelles strictement positives de* L_n dont la multiplicité est impaire *et on considère le polynôme*
> $$Q_n = (X - x_1) \cdots (X - x_r).$$

20. b. Démontrer que la fonction $L_n Q_n$ est de signe constant sur $[0, +\infty[$.
20. c. Démontrer que : si $r < n$, alors $\langle\, L_n \,|\, Q_n \,\rangle = 0$.
20. d. En déduire que le polynôme L_n possède n racines distinctes, qui sont toutes des réels strictement positifs.

Partie E. Un endomorphisme auto-adjoint de F

> *On définit l'application $\mathscr{D}$ en posant*
> $$\forall\, P \in F, \quad \mathscr{D}(P) = [t \mapsto tP''(t) + (1-t)P'(t)]. \tag{7}$$

21. Vérifier que $\mathscr{D}$ est un endomorphisme de F.
22. Soit $P \in E$. Calculer la dérivée de la fonction
$$\left[t \mapsto te^{-t}P'(t)\right]$$
et en déduire une nouvelle expression de $\mathscr{D}(P)(t)$.
23. Démontrer que
$$\forall\, P, Q \in F, \quad \big\langle\, \mathscr{D}(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = \big\langle\, P \,\big|\, \mathscr{D}(Q) \,\big\rangle. \tag{8}$$
24. Soient $P \in \operatorname{Ker} \mathscr{D}$ et $Q \in \operatorname{Im} \mathscr{D}$. Que vaut $\langle\, P \,|\, Q \,\rangle$?
25. Calculer $\mathscr{D}(L_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le noyau et l'image de $\mathscr{D}$.
26. En considérant $P = L_m$ et $Q = L_n$ avec $m \neq n$, retrouver que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Solution ❀ Polynômes de Laguerre

Partie A. Préliminaires

1. Par *définition*, une fonction g est intégrable sur I si, et seulement si, elle est continue par morceaux sur I et si l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt$$

est convergente.

Par hypothèse, la fonction $g = [t \mapsto f(t)^2 e^{-t}]$ est continue et l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$$

est convergente. Comme la fonction g est *positive*, la valeur absolue est inutile et on en déduit que cette fonction est intégrable sur $I = [0, +\infty[$.

2. Soit $f \in F$. Comme l'application f est polynomiale, la fonction

$$[t \mapsto f(t)^2 e^{-t}]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I (en particulier, elle est continue) et il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathcal{O}(t^d).$$

Par conséquent,

$$f(t)^2 e^{-t} = f(t)^2 e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-t/2}).$$

Comme la fonction $[t \mapsto e^{-t/2}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction intégrable de référence), on déduit du Théorème de comparaison que

$$[t \mapsto f(t)^2 e^{-t}]$$

est intégrable sur I. L'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\, dt$$

est donc convergente et la fonction f appartient bien à E.

L'ensemble E contient donc l'algèbre F des applications polynomiales.

3. a. Pour toute fonction f à valeurs *réelles*,

$$\forall\, t \in I, \quad |f(t)|^2 = f(t)^2.$$

Quel que soit $t \in I$,

$$\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \geqslant 0.$$

En développant, on obtient

$$f(t)^2 + g(t)^2 \geqslant 2|f(t)g(t)|,$$

ce qui est l'encadrement attendu.

❧ L'application

$$\varphi = [t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}]$$

est continue sur I (en fait, de classe $\mathscr{C}^\infty$) et d'après l'encadrement précédent,

$$\forall\, t \in I, \quad |\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big(f(t)^2 e^{-t} + g(t)^2 e^{-t}\big).$$

Le majorant est une combinaison linéaire d'applications intégrables sur I, donc il est intégrable sur I et, d'après le Théorème de comparaison, l'application φ est intégrable sur I.

3. b. Par définition, l'ensemble E est contenu dans $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel.

Il est clair que la fonction identiquement nulle appartient à E.

Enfin, quelles que soient les éléments f et g dans E et le réel λ,

$$\big(\lambda f(t) + g(t)\big)^2 e^{-t} = \lambda^2 f(t)^2 e^{-t} + g(t)^2 e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t}.$$

Les deux premiers termes sont intégrables sur I (puisque $f \in E$ et $g \in E$ par hypothèse) et le troisième terme est également intégrable sur I (d'après la question précédente). Par conséquent, l'application $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et l'application

$$\big[t \mapsto \big(\lambda f(t) + g(t)\big)^2 e^{-t}\big]$$

est intégrable sur I (en tant que combinaison linéaire d'applications intégrables sur I), donc E est stable par combinaison linéaire.

On a ainsi démontré que E était un espace vectoriel (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$).

4. Soit $P \in F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$[t \mapsto P(xt)]$$

est polynomiale. Pour les raisons exposées en **[2.]**, la fonction

$$[t \mapsto e^{-t} P(xt)]$$

est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'application $\mathscr{L}(P)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de l'intégrale, l'application $\mathscr{L}$ est linéaire : quels que soient les applications polynomiales P et Q, quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\lambda P + Q)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\big(\lambda P(xt) + Q(xt)\big)\, dt \\ &= \lambda \mathscr{L}(P)(x) + \mathscr{L}(Q)(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}(\varepsilon_n)(x) = x^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!\, \varepsilon_n(x)$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{L}(\varepsilon_n) = n!\, \varepsilon_n \in F.$$

On en déduit que $\mathscr{L}$ est un endomorphisme de F.

5. L'image par $\mathscr{L}$ de la base $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la famille

$$(n!\, \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et comme $n! \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette famille est aussi une base de F.

En conséquence, $\mathscr{L}$ est un automorphisme de F ; son noyau est réduit au vecteur nul et son image est égale à F.

6. Pour tout $Q \in F$, l'équation $\mathscr{L}(P) = Q$ admet donc une, et une seule, solution. En décomposant l'inconnue P dans la base canonique :

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \varepsilon_k$$

(où $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille *presque nulle* de réels), on traduit l'équation $\mathscr{L}(P) = Q$ sous la forme

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k! b_k \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{q} a_k \varepsilon_k.$$

Comme $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une *base* de E, on peut identifier terme à terme et en déduire que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant q, \quad b_k = \frac{a_k}{k!} \quad \text{et} \quad \forall\, k > q, \quad b_k = 0.$$

L'équation $\mathscr{L}(P) = Q$ admet donc pour unique solution l'application

$$P = \sum_{k=0}^{q} \frac{a_k}{k!} \varepsilon_k \in F.$$

Partie B. Un produit scalaire sur E

7. D'après **[3.a.]**, quelles que soient les applications f et g dans E, l'application

$$\big[t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}\big]$$

est intégrable sur I, donc $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que cette application est bilinéaire et symétrique.

Pour $f = g$, l'expression $f(t)^2 e^{-t}$ est positive, donc l'intégrale $\langle f \,|\, f \rangle$ est positive (les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant).

Enfin, si $\langle f \,|\, f \rangle = 0$, alors l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\, dt$$

est nulle, alors que l'intégrande est une application *continue* et *positive*. Par conséquent,

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad f(t)^2 e^{-t} = 0.$$

Comme la fonction exp ne s'annule pas, on en déduit que

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad f(t) = 0$$

et donc que $f = 0_E$.

Ainsi, la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive : c'est bien un produit scalaire sur E.

8. Comme les applications f et f' sont polynomiales, les produits

$$f(t) \cdot e^{-t} \quad \text{et} \quad f'(t) \cdot (-e^{-t})$$

sont intégrables sur I (on l'a démontré au **[2.]**).

De plus, par continuité de f en 0,

$$\lim_{t\to 0} f(t) \cdot (-e^{-t}) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) \cdot (-e^{-t}) = 0$$

par croissances comparées des puissances et de la fonction exp au voisinage de $+\infty$.

On déduit alors de la formule d'intégration par parties que

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt = \big[0 - \big(-f(0)\big)\big] - \int_0^{+\infty} f'(t)\big(-e^{-t}\big)\, dt$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\, dt = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-t}\, dt.$$

9. Comme l'application $[t \mapsto t^n]$ est polynomiale, on peut appliquer le résultat de la question précédente.

D'une part, l'intégrale généralisée I_n est bien convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = 0^n + \int_0^{+\infty} n t^{n-1} e^{-t}\, dt = nI_{n-1}$$

ou encore, en décalant les indices,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

❧ Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = n!$. Alors on déduit de la relation de récurrence précédente que

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

Comme $I_0 = 1 = 0!$ (intégrale de référence), on en déduit par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

10. Par définition, $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de F et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n).$$

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à cette famille, on obtient une famille orthonormée $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n).$$

11. a. Comme le sous-espace F_n est un espace vectoriel *de dimension finie*, la projection orthogonale sur F_n est bien définie.

Comme $(u_0, \dots, u_n)$ est une **base orthonormée** de F_n,

$$\forall\, f \in E, \quad \pi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \langle u_k \,|\, f \rangle \cdot u_k.$$

11. b. Par définition de la projection orthogonale,

$$f = \underbrace{\big[f - \pi_n(f)\big]}_{\in F_n^\perp} + \underbrace{\pi_n(f)}_{\in F_n}.$$

On déduit alors du Théorème de Pythagore que

$$\|f\|^2 = \big\|f - \pi_n(f)\big\|^2 + \big\|\pi_n(f)\big\|^2$$

et comme on a décomposé le projeté $\pi_n(f)$ dans une base **orthonormée [11.a.]**,

$$\left\|\pi_n(f)\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle u_k \,|\, f \rangle^2.$$

Ainsi,

$$\left\|f - \pi_n(f)\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle u_k \,|\, f \rangle^2.$$

11. c. D'après la relation précédente,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle f \,|\, u_k \rangle^2 \geqslant 0$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \langle f \,|\, u_k \rangle^2 \leqslant \|f\|^2.$$

La série $\sum \langle f \,|\, u_k \rangle^2$ est une série *de terme général positif* et ses sommes partielles sont majorées par une quantité indépendante de n, donc cette série converge.

11. d. Par définition, la suite de terme général $\pi_n(f)$ converge vers f si, et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\pi_n(f) - f\right\| = 0.$$

D'après **[11.b.]** et **[11.c.]**, cela équivaut au fait que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle f \,|\, u_k \rangle^2 = \|f\|^2.$$

REMARQUE.— Cette condition est simple mais peu pratique car il y a très peu de séries dont on sache calculer la somme...

Partie C. Une base orthonormée de F

12. D'après la définition,

$$\begin{aligned} L_0 &= 1,\\ L_1 &= 1 - X,\\ L_2 &= 2 - 4X + X^2. \end{aligned}$$

13. D'après la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_n(t) &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{d^k}{dt^k}[e^{-t}] \cdot \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}[t^n]\\ &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left[(-1)^k e^{-t}\right] \cdot \left[\frac{n!}{k!} t^k\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!}\right)^2 \cdot \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \cdot t^k. \end{aligned}$$

L'application L_n est donc bien une application polynomiale et son degré est inférieur à n. Le coefficient de t^n est égal à $(-1)^n$, donc le degré de L_n est bien égal à n.

On a donc en particulier

$$\begin{aligned} L_n = (-1)^n X^n &- (-1)^n n^2 X^{n-1}\\ &+ (-1)^n \frac{n^2(n+1)^2}{2} X^{n-2}\\ &+ \cdots + n!. \end{aligned}$$

14. Il est clair que

$$\varphi_n(t) \underset{t\to0}{=} t^n\big(1 - t + o(t^n)\big) = t^n - t^{n+1} + o(t^{n+1}).$$

❧ L'application φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor,

$$\varphi_n(t) \underset{t\to0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^{n+1}).$$

L'unicité du développement limité nous permet d'identifier terme à terme.

$$\begin{aligned} \forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \varphi_n^{(k)}(0) &= 0\\ \varphi_n^{(n)}(0) &= n!\\ \varphi_n^{(n+1)}(0) &= -(n+1)! \end{aligned}$$

15. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions φ_n et f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le produit

$$\psi_k = \left[t \mapsto \varphi_n^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t)\right]$$

est continu sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\psi_k(t)$ est le produit d'un polynôme par e^{-t} (Formule de Leibniz, cf **[13.]**) : par conséquent, comme on l'a déjà vu en **[2.]**, l'application ψ_k est bien intégrable sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

❧ Considérons $0 \leqslant k < n$. Avec

$$u(t) = f^{(k)}(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \varphi_n^{(n-k-1)}(t),$$

on a

$$u'(t)v(t) = \varphi_n^{(n-(k+1))}(t) f^{(k+1)}(t) = \psi_{k+1}(t)$$

et

$$u(t)v'(t) = \varphi_n^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t) = \psi_k(t),$$

ces deux fonctions étant intégrables sur I. Par ailleurs,

$$u(t)v(t) = \varphi_n^{(n-k-1)}(t) f^{(k)}(t)$$

est nul en $t = 0$ car $0 \leqslant n - k - 1 = (n-1) - k < n$ **[14.]** et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (par croissances comparées d'une fonction polynomiale et de e^{-t}).

On déduit alors de la Formule d'intégration par parties que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-(k+1))}(t) f^{(k+1)}(t)dt = -\int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t)dt$$

pour $0 \leqslant k < n$ et donc, par récurrence finie, que

$$(-1)^k \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n-k)}(t) f^{(k)}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \varphi_n^{(n)}(t) f^{(0)}(t)\, dt$$

pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour conclure, il reste à remarquer que l'intégrale généralisée au second membre est égale à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} L_n(t) f(t)\, dt = \langle L_n \,|\, f \rangle.$$

15. b. Pour tout $f \in F_{n-1}$, on a $f^{(n)} \equiv 0$ et d'après la relation précédente (avec $k = n$),

$$\langle L_n \,|\, f \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) f^{(n)}(t)\, dt = 0.$$

Le vecteur L_n est donc orthogonal au sous-espace F_{n-1}.
16. D'après **[13.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg L_n = n.$$

En tant que famille échelonnée en degré, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une base de F.
❧ Quels que soient les entiers $0 \leqslant m < n$, on a

$$\deg L_m = m \leqslant (n-1)$$

(inégalité entre nombres entiers) et, par définition,

$$\forall\, P \in F, \qquad P \in F_{n-1} \iff \deg P \leqslant n-1.$$

Donc $L_m \in F_{n-1}$ et on vient de voir que L_n était orthogonal à F_{n-1}, donc

$$\langle L_m \,|\, L_n \rangle = 0.$$

Ainsi, la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de F.
❧ Toujours d'après **[15.a.]**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|L_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) L_n^{(n)}(t)\, dt.$$

Or L_n est une fonction polynomiale de degré n dont le coefficient dominant est égal à $(-1)^n$ **[13.]**, donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad L_n^{(n)}(t) = (-1)^n n!$$

et d'après **[9.]**,

$$\|L_n\|^2 = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\, dt = (n!)^2.$$

Par conséquent, la famille

$$\left(\frac{L_n}{\|L_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{L_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une base orthonormée de F.
17. a. Il est clair que f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs,

$$f_a(t)^2 e^{-t} = \exp\big[-(1+2a)t\big]$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $(1+2a) > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Donc

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+, \qquad f_a \in E.$$

Par ailleurs,

$$\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2a)t}\, dt = \frac{1}{1+2a}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
17. b. Comme $f_a \notin F$, on ne peut pas appliquer directement la relation établie en **[15.a.]**. Cependant, il est facile de voir que la démonstration qu'on en a donnée s'applique aussi aux fonctions f_a.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle L_k \,|\, f_a \rangle &= \int_0^{+\infty} \varphi_k^{(0)}(t) f_a^{(k)}(t)\, dt \\ &= (-a)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-(1+a)t}\, dt.\end{aligned}$$

Comme $(1+a) > 0$, le changement de variable affine

$$u = (1+a)t \qquad du = (1+a)\, dt$$

nous dit que l'intégrale

$$\frac{1}{(1+a)^{k+1}} \int_0^{+\infty} [(1+a)t]^k e^{-(1+a)t} (1+a)\, dt$$

est égale à

$$\frac{1}{(1+a)^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\, du,$$

c'est-à-dire à

$$\frac{k!}{(1+a)^{k+1}}$$

d'après **[9.]**. Par conséquent,

$$\langle L_k \,|\, f_a \rangle = \frac{k!\, a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$

17. c. D'après **[16.]**, on peut appliquer la propriété **[11.d.]** avec

$$u_k = \frac{L_k}{k!}.$$

D'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle f_a \,|\, u_k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle L_k \,|\, f_a \rangle^2}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}\right)^2.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison

$$q = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 \in \,]0, 1[$$

et on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle f_a \,|\, u_k \rangle^2 = \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^2} = \frac{1}{1+2a}.$$

On vient donc d'établir **[17.a.]** que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+, \quad \|f_a\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle f_a \,|\, u_k \rangle^2$$

et donc **[11.d.]** que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{n\to+\infty} \big\|f_a - \pi_n(f_a)\big\| = 0.$$

Partie D. Propriétés des polynômes de Laguerre

18. a. D'après **[13.]**,

$$\deg L_{n+2} = \deg(X-2n-3)L_{n+1} = n+2$$

donc $P_n \in F_{n+2}$ par combinaison linéaire.

Encore d'après **[13.]**, les coefficients dominants de L_{n+2} et de $(X-2n-3)L_{n+1}$ sont respectivement égaux à

$$(-1)^{n+2} \quad \text{et à} \quad (-1)^{n+1},$$

donc le terme de degré $(n+2)$ dans P_n est nul et par conséquent $P_n \in F_{n+1}$.

Toujours d'après **[13.]**, le coefficient de degré $(n+1)$ de L_{n+2} est égal à

$$(-1)^{n+3}(n+2)^2 = -(-1)^{n+2}(n+2)^2$$

et celui de $(X-2n-3)L_{n+1}$, somme de *deux* termes, est égal à

$$\begin{aligned}(-1)^{n+2}(n+1)^2 - (2n+3)(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+2}(n^2+4n+4) \\ &= (-1)^{n+2}(n+2)^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, le terme de degré $(n+1)$ dans P_n est nul et on a bien

$$P_n \in F_n.$$

18. b. Soit $0 \leqslant k < n$.

❧ D'après **[13.]**,

$$\deg XL_k = k+1 \leqslant n$$

(inégalité *entre entiers*, comme au **[16.]**), donc

$$XL_k \in F_n.$$

D'après **[15.b.]**,

$$\langle L_{n+1} \,|\, XL_k \rangle = 0.$$

❧ Par définition de P_n et par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\langle P_n \,|\, L_k \rangle = \langle L_{n+2} \,|\, L_k \rangle + \langle XL_{n+1} \,|\, L_k \rangle \\ - (2n+3) \langle L_{n+1} \,|\, L_k \rangle.\end{aligned}$$

D'après **[16.]**,

$$\langle L_{n+2} \,|\, L_k \rangle = \langle L_{n+1} \,|\, L_k \rangle = 0$$

puisque $k < n+1 < n+2$.

D'après l'expression du produit scalaire et la remarque préliminaire,

$$\langle XL_{n+1} \,|\, L_k \rangle = \langle L_{n+1} \,|\, XL_k \rangle = 0$$

donc on a bien

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \langle P_n \,|\, L_k \rangle = 0.$$

18. c. D'après les deux questions précédentes, le polynôme P_n est orthogonal au sous-espace

$$F_{n-1} = \operatorname{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_{n-1})$$

et appartient au sous-espace

$$F_n = \operatorname{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_n).$$

D'après **[16.]**,

$$F_n = F_{n-1} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot L_n$$

donc il existe deux vecteurs $y \in F_{n-1}$ et $z \in \mathbb{R} \cdot L_n$ tels que

$$P_n = y + z.$$

Mais comme P_n et z sont orthogonaux à F_{n-1},

$$\langle P_n \,|\, y \rangle = \langle z \,|\, y \rangle = 0$$

et donc

$$0 = \langle P_n \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, y \rangle + \langle z \,|\, y \rangle = \|y\|^2 + 0,$$

donc $y = 0_E$ et par conséquent

$$P_n = z \in \mathbb{R} \cdot L_n.$$

Il existe donc un (unique) scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = \lambda L_n$.

❧ Nous allons déterminer λ au moyen de l'expression des coefficients trouvée en **[13.]**. En effet, l'unicité de l'expression développée d'un polynôme permet d'identifier les coefficients deux à deux.

Tout d'abord, le coefficient du terme de degré n de λL_n est égal à $(-1)^n\lambda$. Ensuite, celui de L_{n+2} est égal à

$$\frac{(-1)^n}{2}(n+2)^2(n+1)^2.$$

Celui de XL_{n+1} est égal à

$$-\frac{(-1)^n}{2}(n+1)^2 n^2.$$

Enfin, celui de $(2n+3)L_{n+1}$ est égal à

$$(-1)^n(2n+3)(n+1)^2.$$

Par conséquent, le coefficient du terme de degré n dans P_n est égal à

$$-(-1)^n(n+1)^2$$

(après quelques simplifications sans difficulté).

En particulier, en identifiant les coefficients du terme de degré n, on en déduit que $\lambda = -(n+1)^2$ et donc que

$$L_{n+2} + (X-2n-3)L_{n+1} = P_n = -(n+1)^2 L_n.$$

19. a. Par définition,

$$L_n(t) = e^t \varphi_n^{(n)}(t)$$

et donc, en dérivant,

$$L_n'(t) = e^t \varphi_n^{(n+1)}(t) + e^t \varphi_n^{(n)}(t),$$

c'est-à-dire

$$e^t \varphi_n^{(n+1)}(t) = L_n'(t) - L_n(t).$$

Il est clair que

$$\varphi_{n+1}(t) \overset{\text{déf.}}{=} t^{n+1}e^{-t} = t \cdot t^n e^{-t} = t \cdot \varphi_n(t).$$

D'après la Formule de Leibniz,

$$\varphi_{n+1}^{(n+1)}(t) = t\varphi_n^{(n+1)}(t) + (n+1)\varphi_n^{(n)}(t)$$

et donc (en multipliant par e^t)

$$L_{n+1}(t) = t\big[L_n'(t) - L_n(t)\big] + (n+1)L_n(t).$$

19. b. On déduit de la relation précédente que

$$L_{n+2}(t) = tL_{n+1}'(t) + (n+2-t)L_{n+1}(t)$$

(par un décalage des indices) et que

$$\begin{aligned} L_{n+1}'(t) &= L_n'(t) + tL_n''(t) + (n+1-t)L_n'(t) - L_n(t) \\ &= tL_n''(t) + (n+2-t)L_n'(t) - L_n(t) \end{aligned}$$

(par dérivation). Par conséquent,

$$L_{n+2}(t) = t^2L_n''(t) + t(n+2-t)L_n'(t) - tL_n(t).$$

En injectant les expressions de $L_{n+2}(t)$ et de $L_{n+1}(t)$ dans l'égalité du **[18.c.]**, on obtient

$$t^2L_n''(t) + t(1-t)L_n'(t) + ntL_n(t) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t > 0, \quad tL_n''(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t) = 0.$$

REMARQUE.— Les simplifications sont assez longues et demandent de procéder avec rigueur, mais elles ne présentent aucune difficulté technique (il ne s'agit que de calculs polynomiaux).

20. a. L'intégrale généralisée est en fait un produit scalaire :

$$\langle\, L_n \,|\, 1 \,\rangle \overset{[12.]}{=} \langle\, L_n \,|\, L_0 \,\rangle \overset{[16.]}{=} 0$$

puisque $n > 0$.

❧ Si le polynôme L_n n'a pas de racine réelle strictement positive, alors l'application polynomiale L_n est de signe constant sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires). Comme la fonction exp est positive, on en déduit que l'intégrande

$$L_n(t)e^{-t}$$

est une fonction continue, de signe constant sur $[0, +\infty[$ et qui ne s'annule en aucun point de l'intervalle $]0, +\infty[$. Dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} L_n(t)e^{-t}\, dt$$

est non nulle (et du signe de l'intégrande), ce qui contredit le premier calcul.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme L_n admet au moins une racine réelle strictement positive.

REMARQUE.— On a en fait prouvé que l'application L_n changeait de signe sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et donc que L_n admettait au moins une racine réelle strictement positive *dont la multiplicité est impaire* : en effet, les racines de multiplicité paire ne font pas changer le signe de l'application polynomiale.

20. b. D'après la question précédente, le polynôme L_n admet au moins une racine réelle strictement positive de multiplicité impaire. En notant $r \in \mathbb{N}^*$, le nombre de ces racines et en les indexant de manière croissante, on définit le polynôme Q_n dont le degré est égal à $r \leqslant n$ (puisque L_n, en tant que polynôme de degré n, admet au plus n racines distinctes).

En factorisant le polynôme L_n en produit de polynômes irréductibles à coefficients réels, on obtient

$$\begin{aligned} L_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(X - x_k)^{2p_k+1} \prod_{k=r+1}^{r+s}(X - x_k)^{m_k} \\ \times \prod_{k=r+s+1}^{r+s+t}(X^2 + a_kX + b_k)^{m_k} \end{aligned}$$

où on voit apparaître successivement :

— le coefficient dominant $(-1)^n$ **[13.]**;

— les racines réelles strictement positives de multiplicité impaire

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad m_k = 2p_k + 1$$

— les autres racines réelles $x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}$;

— les facteurs irréductibles de degré 2 qui correspondent aux racines complexes conjuguées.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} L_n(t)Q_n(t) = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(t - x_k)^{2p_k+2} \prod_{k=r+1}^{r+s}(t - x_k)^{m_k} \\ \times \prod_{k=r+s+1}^{r+s+t}(t^2 + a_kt + b_k)^{m_k} \end{aligned}$$

et dans ce produit n'apparaissent que des facteurs de signe constant sur $[0, +\infty[$:

— pour $1 \leqslant k \leqslant r$, l'expression $(t - x_k)$ change de signe, mais elle est élevée à une puissance *paire*;

— pour $r < k \leqslant r + s$, ou bien l'expression $(t - x_k)$ ne change pas de signe (parce que $x_k < 0$), ou bien elle change de signe mais l'exposant m_k est pair;

— pour $r+s < k \leqslant r+s+t$, l'expression $(t^2+a_kt+b_k)$ est toujours positive.

L'application L_nQ_n est donc continue et de signe constant sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

20. c. Si $r < n$, alors $Q_n \in F_r$ et donc

$$\langle\, L_n \,|\, Q_n \,\rangle = 0$$

d'après **[15.b.]**.

20. d. D'après **[20.b.]**, l'intégrale généralisée

$$\langle\, L_n \,|\, Q_n \,\rangle = \int_0^{+\infty} L_n(t)Q_n(t)e^{-t}\, dt$$

n'est pas nulle (intégrale sur un intervalle de longueur strictement positive d'une fonction de signe constant et non identiquement nulle).

L'hypothèse $r < n$ est donc impossible. Comme un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes, on a donc

$$r = n.$$

Comme L_n est un polynôme de degré n qui admet n racines réelles strictement positives de multiplicité impaire, il n'a pas d'autre racine dans $\mathbb{C}$ et toutes ses racines ont pour multiplicité 1.

Le polynôme L_n est donc un polynôme scindé à racines simples, dont toutes les racines sont des réels strictement positifs.

Partie E. Un endomorphisme auto-adjoint de F

21. Comme l'espace $F = \mathbb{R}[X]$ est stable par produit (structure d'algèbre associative) et par dérivation, il est clair que $\mathscr{D}$ est un endomorphisme de F.

22. En dérivant $te^{-t}P'(t)$ (produit de trois fonctions dérivables), on obtient

$$e^{-t}\big[tP''(t) + (1-t)P'(t)\big] = e^{-t}\mathscr{D}(P)(t).$$

Autrement dit,

$$\mathscr{D}(P)(t) = e^t \cdot \frac{d}{dt}\big[te^{-t}P'(t)\big].$$

23. Comme $\mathscr{D}(P) \in F$, le produit scalaire

$$\big\langle\, \mathscr{D}(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle$$

est bien défini **[7.]**. D'après la question précédente,

$$\big\langle\, \mathscr{D}(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\big[te^{-t}P'(t)\big] \cdot Q(t)\, dt.$$

L'expression

$$\big[te^{-t}P'(t)\big] \cdot Q(t)$$

est évidemment nulle en $t = 0$ et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (par croissances comparées d'un facteur polynomial et du facteur e^{-t}). En outre, le produit

$$\big[te^{-t}P'(t)\big] \cdot \frac{dQ}{dt}(t) = tP'(t)Q'(t) \cdot e^{-t}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ **[3.a.]**.

D'après la Formule d'intégration par parties,

$$\big\langle\, \mathscr{D}(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t) \cdot e^{-t}\, dt.$$

On a obtenu une expression où P et Q jouent des rôles *symétriques*. Une nouvelle intégration par parties nous conduirait donc à

$$-\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t) \cdot e^{-t}\, dt = \big\langle\, P \,\big|\, \mathscr{D}(Q) \,\big\rangle$$

et donc à la conclusion que $\mathscr{D}$ est un opérateur auto-adjoint.

Remarque.— Comme F est un espace vectoriel de dimension *infinie*, l'existence d'un adjoint pour $\mathscr{D} \in L(F)$ n'a rien d'évident. Il y a donc deux parties d'égale importance dans la conclusion précédente :

— d'une part, l'endomorphisme $\mathscr{D}$ admet un adjoint ;
— d'autre part, cet adjoint est égal à $\mathscr{D}$.

24. Par hypothèse, il existe $Q_0 \in F$ tel que $Q = \mathscr{D}(Q_0)$. D'après la question précédente,

$$\langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \big\langle\, P \,\big|\, \mathscr{D}(Q_0) \,\big\rangle = \big\langle\, \mathscr{D}(P) \,\big|\, Q_0 \,\big\rangle = 0$$

puisque $\mathscr{D}(P) = 0_E$ (par hypothèse sur P).

25. D'après **[19.b.]**,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{D}(L_n) = -nL_n.$$

❧ Par conséquent,

$$L_0 \in \operatorname{Ker} \mathscr{D}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \frac{-1}{n} \cdot \mathscr{D}(L_n) = \mathscr{D}\Big(\frac{-L_n}{n}\Big) \in \operatorname{Im} \mathscr{D}.$$

Comme la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de F, on en déduit (en reprenant la démarche suivie au **[6.]**) que

$$\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \mathbb{R} \cdot L_0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \mathscr{D} = \operatorname{Vect}(L_n,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

26. Soient $m \neq n$, deux entiers naturels. D'après **[23.]**,

$$\big\langle\, \mathscr{D}(L_m) \,\big|\, L_n \,\big\rangle = \big\langle\, L_m \,\big|\, \mathscr{D}(L_n) \,\big\rangle$$

et d'après la question précédente,

$$\langle\, -mL_m \,|\, L_n \,\rangle = \langle\, L_m \,|\, -nL_n \,\rangle.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit que

$$-m\,\langle\, L_m \,|\, L_n \,\rangle = -n\,\langle\, L_m \,|\, L_n \,\rangle.$$

Comme $m \neq n$, on en déduit que

$$\langle\, L_m \,|\, L_n \,\rangle = 0.$$