Équations différentielles

I

Équations du premier ordre

1. Variation de la constante
On suppose connue une solution x_0 de l'équation différentielle homogène

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

et on cherche une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

de la forme

$$x(t) = K(t)x_0(t).$$

Alors

$$\forall\, t \in I, \quad K'(t)x_0(t) = b(t).$$

2. Filtre passe-bas

2.1 La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \tau x'(t) + x(t) = e^{i\omega t}$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

2.2 Pourquoi un filtre dont la sortie vérifie cette équation différentielle est-il appelé *filtre passe-bas* ?

3.1 La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad tx'(t) - x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = Kt.$$

3.2 L'équation $tx'(t) - x(t) = 1$ admet -1 pour solution particulière.

3.3 L'équation $tx'(t) - x(t) = \cos t$ admet

$$-\cos x - x \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

pour solution particulière.

4. On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.

$$\forall\, t > 0, \quad tx'(t) + x(t) = b(t).$$

4.1 Les solutions de l'équation homogène sont K/t.

4.2 Pour $b(t) \equiv 1$, une solution particulière est 1.

4.3 Pour $b(t) = t$, une solution particulière est $t/2$.

4.4 Pour $b(t) = 1 + 2t$, une solution particulière est $(t+1)$ (par superposition).

5. La fonction $x(t)$ est solution de

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad tx'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{K}{t}.$$

La seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

6. On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.

$$\forall\, t > 0, \quad x'(t) + tx(t) = b(t).$$

6.1 Les solutions de l'équation homogène sont $K\exp(-t^2/2)$.

6.2 Pour $b(t) = t$, une solution particulière est 1.

6.3 Pour $b(t) = t^2 + 1$, une solution particulière est t.

6.4 Pour $b(t) = (t+1)^2$, une solution particulière est $(t+2)$ (par superposition).

6.5 Pour $b(t) = \exp(-t^2/2)$, une solution particulière est

$$te^{-t^2/2}.$$

7. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$t^2x'(t) + x(t) = 1.$$

7.1 L'application $[t \mapsto 1]$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.

7.2 Si x est une solution, alors il existe deux constantes λ_- et λ_+ telles que

$$\forall\, t < 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_- \exp(1/t)$$

et

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_+ \exp(1/t).$$

7.3 Il n'existe qu'une seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

II

Équations du second ordre

8. On suppose que $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est différent de 2.
La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 4x(t) = e^{i\omega t}$$

si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{i\omega t}}{4 - \omega^2}.$$

9. Problèmes de Cauchy
La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 3x''(t) + 8x'(t) + 4x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-2t/3}.$$

Résolutions de quelques problèmes de Cauchy :

f(0)	f'(0)	(A,B)
1	-2	(1,0)
2	$-8/3$	(1,1)
3	-2	(0,3)

10. Si l'équation caractéristique

$$X^2 - sX + p = 0$$

admet deux solutions réelles, alors l'équation complète

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - sx'(t) + px(t) = e^{i\omega t}$$

admet pour solution particulière

$$x_0(t) = \frac{(p-\omega^2) + is\omega}{(p-\omega^2)^2 + s^2\omega^2}\, e^{i\omega t}.$$

10.1 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^{i\omega t}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1-2i}{10}\, e^{it}$$

pour $\omega = 1$ et de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} - \frac{1+8i}{65}\, e^{2it}$$

pour $\omega = 2$.

10.2 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t} - \frac{2+i}{10}\, e^{it}.$$

10.3 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} + \frac{7-6i}{85}\, e^{it}.$$

11. Problèmes de Cauchy

11.1 La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 5$ et $x'(0) = 2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^{-2t} + 3e^{2t}.$$

11.2 La solution de l'équation

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 2$ et $x'(0) = 5$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^t + 3te^t.$$

11.3 La solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = -3$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{-t}(\cos t - 2\sin t).$$

11.4 La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = \sqrt{2}/2$ et $x'(0) = 3\sqrt{2}/2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t}\sin(3t + \pi/4).$$

Quelle est la solution qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = 3$?

III

Raccordements

12.1 Une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = \sin t$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = Ke^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

12.2 On considère la fonction $b(t)$ définie par

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad b(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad b(t) = \sin t.$$

1. Si une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = b(t)$$

alors il existe deux constantes A et B réelles telles que

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad x(t) = Ae^{-t}$$

et

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Be^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

2. La fonction x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A = B - 1/2$.
3. Il n'y a pas de solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car la fonction b n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

13.1 Sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tx'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante K telle que

$$\forall\, t \in I, \qquad x(t) = \frac{K}{t}.$$

13.2 L'équation $tx'(t) + x(t) = 1$ admet $[t \mapsto 1]$ pour seule solution sur $\mathbb{R}$.

13.3 L'application

$$\left[t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}\right]$$

admet un prolongement f_0 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation $tx'(t) + x(t) = \sin t$ admet f_0 pour seule solution sur $\mathbb{R}$.