

1. La réduction d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E consiste à identifier des sous-espaces vectoriels de E sur lesquels le comportement de u est aussi simple que possible.

I

Matrices semblables

2.1 Soient A et B , deux matrices carrées. La matrice B est **semblable** à la matrice A lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On note alors $B \equiv A$.

2.2 Soit $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La matrice B est semblable à A si, et seulement si, il existe une base \mathcal{C} telle que $B = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

2.3 → Pour tout entier $n \geq 1$, la **relation de similitude** \equiv est une relation d'équivalence sur chaque espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.4 → Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

3. Conjugaison des matrices

3.1 → Quelle que soit la matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$[M \mapsto P^{-1}MP]$$

est un automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3.2 Soient A et B , deux matrices semblables.

1. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les matrices A^k et B^k sont semblables.

2. La matrice A est inversible si, et seulement si, la matrice B est inversible et dans ce cas, A^{-1} et B^{-1} sont semblables.

3. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables. En particulier, $Q(A) = 0$ si, et seulement si, $Q(B) = 0$.

4. Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont semblables.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Matrices codiagonalisables

- Deux matrices diagonales D_1 et D_2 commutent.
- S'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = D_1 \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = D_2,$$

alors les matrices A et B commutent.

3. Si A et B représentent deux réflexions d'un plan euclidien dans une même base orthonormée, elles sont semblables à une même matrice diagonale. Les matrices A et B commutent-elles?

6. Une matrice de rang 1 est semblable à une matrice dont toutes les colonnes, sauf la première, sont nulles. Plus précisément, si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice de rang 1, alors :

- ou bien A est semblable à $E_{n-1,n}$;
- ou bien il existe $\theta \in \mathbb{K}$ tel que A soit semblable à $\theta E_{n,n}$.

Étudier la réciproque.

7. Soient B et C , deux matrices semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Pour quels $x \in \mathbb{C}$ les matrices $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ sont-elles semblables?

8. Si les matrices A_1 et A_2 sont semblables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors les matrices

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

sont semblables dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

9. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0 & 0 \\ | & | & | & | \\ 1 & | & | & 1 \\ 0 & 0 & -0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+2}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \text{Diag}(0_n, I_2)$$

sont semblables.

Entraînement

11. Questions pour réfléchir

- Si A et B appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = B$, quelle est la taille de P ?
- Quelles sont les matrices semblables à I_n ? à 0_n ?
- Deux matrices de même déterminant sont-elles semblables?
- Deux matrices semblables sont équivalentes.
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r > 0$ telle que $A^2 = 0$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

7. Soient $u \in L(E)$ et $v \in L(F)$, les endomorphismes définis par $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$.

Les matrices A et B sont semblables si, et seulement si, il existe un isomorphisme $\varphi \in L(F, E)$ tel que $v = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$.

8. Pour tout isomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$, la conjugaison

$$[u \mapsto \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}]$$

est un isomorphisme d'algèbres de $L(E)$ sur $L(F)$.

12. Si le noyau et l'image de $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont en somme directe, alors M est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où A est une matrice inversible.

13. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\text{Ker } M = \text{Im } M$. L'entier n est pair et la matrice $M + M^T$, qui est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix},$$

est inversible.

14. Endomorphismes et matrices de rang 1

14.1 Soit $f \in L(E)$, un endomorphisme de rang 1.

1. Il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $u \in E$ tels que

$$(1) \quad \forall x \in E, \quad f(x) = \varphi(x) \cdot u.$$

Discuter l'unicité du couple (φ, u) . Relier le noyau et l'image de f à φ et à u .

2. Les endomorphismes f et f^2 sont proportionnels. Condition sur u et φ pour que f soit un projecteur ?

3. Si g est un endomorphisme tel que g^2 soit proportionnel à g , le rang de g est-il égal à 1 ?

14.2 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice de rang 1.

4. Il existe deux matrices colonnes U et V , non nulles, telles que

$$(2) \quad A = UV^T.$$

Relier le couple (U, V) au couple (u, φ) de (1). Condition sur U et V pour que A soit symétrique ? Expression de la trace de A en fonction de U et V ? En déduire que

$$A^2 = \text{tr}(A) \cdot A.$$

5. La matrice A est une matrice de projection si, et seulement si, $V^T U = 1$.

15. Suite de [6] – Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\text{rg } B = 1$, alors

$$\det(A + B)(A - B) \leq (\det A)^2.$$

II

Polynômes en u

16. Soit $u \in L(E)$. Pour tout polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d,$$

on définit l'endomorphisme $P(u)$ de E par

$$P(u) = a_0 I_E + a_1 u + \dots + a_d u^d.$$

16.1 → L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $L(E)$ définie par

$$\mathcal{E}_u = [P \mapsto P(u)]$$

est un morphisme d'algèbres.

16.2 ≠ L'image du morphisme \mathcal{E}_u est l'algèbre des polynômes en u . Cette sous-algèbre de $L(E)$ est notée $\mathbb{K}[u]$.

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(u^k, k \in \mathbb{N})$$

16.3 La famille $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est liée si, et seulement si, l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est un espace de dimension finie.

16.4 Si l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est un espace de dimension infinie, alors la famille $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

17. Règle de calculs de $\mathbb{K}[u]$

Soit $u \in L(E)$.

17.1 → L'algèbre des polynômes en u est commutative : quels que soient les polynômes P et Q ,

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

17.2 Quels que soient les polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, les sous-espaces $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par $Q(u)$.

17.3 Si $P = QP_0 + R$, alors $P(u) = Q(u) \circ P_0(u) + R(u)$.

17.4 Pour tout $v \in \text{GL}(E)$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(v^{-1} \circ u \circ v) = v^{-1} \circ P(u) \circ v.$$

17.5 Si le polynôme P est scindé :

$$P = c_d (X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_r)^{m_r},$$

alors

$$P(u) = c_d \cdot (u - \alpha_1 I_E)^{m_1} \circ \dots \circ (u - \alpha_r I_E)^{m_r}.$$

17.6 Si $P = P_1 P_2 \dots P_r$, alors

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r, \quad P(u) = P_{\sigma(1)}(u) \circ P_{\sigma(2)}(u) \circ \dots \circ P_{\sigma(r)}(u).$$

17.7 Si $P = P_1 P_2 \dots P_r$ et si $x \in \text{Ker } P_k(u)$ pour un $1 \leq k \leq r$, alors $x \in \text{Ker } P(u)$.

17.8 → Formule de la série géométrique

Quels que soient les polynômes P et Q et l'entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P(u)^{n+1} - Q(u)^{n+1} = [P(u) - Q(u)] \circ \left[\sum_{k=0}^n P(u)^{n-k} \circ Q(u)^k \right].$$

17.9 → Formule du binôme

Quels que soient les polynômes P et Q et l'entier $n \in \mathbb{N}$,

$$[P(u) + Q(u)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot P(u)^k \circ Q(u)^{n-k}.$$

18. Si deux endomorphismes u et v commutent, alors

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u).$$

Si de plus v est inversible, alors u et v^{-1} commutent.

II.1 Idéal annulateur

19. ≠ Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul : $P(u) = \omega_E$.

20. Le degré d'un polynôme annulateur non nul est supérieur à 1.

21. Exemples

21.1 Un polynôme P est un polynôme annulateur de la matrice diagonale

$$A = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

si, et seulement si, les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines de P .

21.2 Un polynôme P est un polynôme annulateur de la matrice diagonale par blocs

$$A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_r)$$

si, et seulement si, P est un polynôme annulateur de chacun des blocs diagonaux A_1, \dots, A_r .

21.3 Si la matrice A est triangulaire et si P est un polynôme annulateur de A , alors les coefficients diagonaux de A sont des racines de P .

22. Soit $u \in L(E)$.

22.1 ≠ Le noyau du morphisme \mathcal{E}_u est l'idéal annulateur de u .

22.2 → L'idéal annulateur de $u \in L(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ qui est absorbant pour la multiplication : si $P(u) = \omega_E$, alors

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad (PQ)(u) = (QP)(u) = \omega_E.$$

22.3 Si P est un polynôme annulateur de u , alors tout multiple de P est un polynôme annulateur de u .

22.4 Si P et Q sont deux polynômes annulateurs non nuls de u , alors le reste de la division euclidienne de P par Q est encore un polynôme annulateur de u .

22.5 Si P et Q sont deux polynômes annulateurs de u , alors leur pgcd est un polynôme annulateur de u .

23. Soit $u \in L(E)$.

23.1 L'idéal annulateur de u n'est véritablement utile pour étudier cet endomorphisme que s'il n'est pas réduit à $\{0\}$: il est important de savoir s'il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u .

23.2 → Polynômes annulateurs et relations de liaison

Il existe un polynôme annulateur non nul de u dont le degré est inférieur à d si, et seulement si, la famille

$$(I_E, u, \dots, u^d)$$

est liée.

23.3 → Si E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors l'idéal annulateur de u n'est pas réduit à $\{0\}$: il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u .

24. Dimension de l'algèbre des polynômes en u

Grâce au théorème [23.2], nous allons pouvoir compléter la propriété [16.4].

24.1 S'il existe un polynôme annulateur de u de degré q , alors

$$\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(I_E, u, \dots, u^{q-1}) \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{K}[u] \leq q.$$

24.2 Si l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est un espace de dimension finie d , alors il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de u dont le degré soit strictement inférieur à d ; la famille

$$(I_E, u, \dots, u^{d-1})$$

est une base de $\mathbb{K}[u]$ et comme la famille

$$(I_E, u, \dots, u^{d-1}, u^d)$$

est liée, il existe un polynôme annulateur de degré d .

24.3 La dimension de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est aussi le plus bas degré possible pour les polynômes annulateurs non nuls de u .

25. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on définit un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ en posant

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \mathcal{E}_M(P) = P(M).$$

L'image du morphisme \mathcal{E}_M est l'algèbre $\mathbb{K}[M]$ des polynômes en M . Cette sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est commutative.

Le noyau de ce morphisme est l'**idéal annulateur** de M . Les éléments de cet idéal, qui n'est pas réduit au polynôme nul, sont les **polynômes annulateurs** de M .

II.2 Endomorphismes nilpotents

26. Soit E , un espace vectoriel.

26.1 \Leftrightarrow Un endomorphisme $u \in L(E)$ est **nilpotent** lorsqu'un de ses itérés est l'endomorphisme nul :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad u^n = \omega_E.$$

26.2 \Leftrightarrow Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'une de ses puissances est la matrice nulle :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 0_n.$$

26.3 Un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.

26.4 S'il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit nilpotente, alors l'endomorphisme u est nilpotent.

26.5 Si un endomorphisme u est nilpotent, alors la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est nilpotente, quelle que soit la base \mathcal{B} choisie.

27. \Leftrightarrow L'**indice de nilpotence** de u est le plus petit élément de

$$\{n \in \mathbb{N} : u^n = \omega_E\}.$$

28. \rightarrow Si u est nilpotent, alors l'indice de nilpotence de u est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = \omega_E$ et $u^{n-1} \neq \omega_E$.

29. Soient E , un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u , un endomorphisme nilpotent non nul de E , d'indice d .

29.1 Il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille

$$(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x))$$

soit une famille libre. En fait, tout vecteur $x \notin \text{Ker } u^{d-1}$ convient.

29.2 → Majoration de l'indice de nilpotence

L'indice de nilpotence de $u \in L(E)$ est inférieur à $\dim E$. \rightarrow [119]

29.3 La famille $(u^k)_{0 \leq k < d}$ est une base de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$.

II.3 Polynôme minimal

30. Soit u , un endomorphisme de E .

Nous supposons ici que l'idéal annulateur de l'endomorphisme u n'est pas réduit au polynôme nul [23.3] et nous cherchons à décrire la structure de l'idéal annulateur.

31. \rightarrow Si l'idéal annulateur $\text{Ker } \mathcal{E}_u$ de u n'est pas réduit au polynôme nul, alors il existe un, et un seul, polynôme unitaire μ_0 tel que

$$P(u) = \omega_E \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P = Q \cdot \mu_0.$$

32. \Leftrightarrow Si l'idéal annulateur de u n'est pas réduit à $\{0\}$, alors le **polynôme minimal** de u est l'unique polynôme annulateur unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de u .

33.1 Un polynôme P est un polynôme annulateur de u si, et seulement si, P est divisible par le polynôme minimal de u .

33.2 Si tout polynôme annulateur de u est aussi un polynôme annulateur de v , alors le polynôme minimal de v divise le polynôme minimal de u .

33.3 Deux endomorphismes u et v ont même polynôme minimal si, et seulement si, ils ont les mêmes polynômes annulateurs.

$$\mu_u = \mu_v \iff \text{Ker } \mathcal{E}_u = \text{Ker } \mathcal{E}_v$$

34. → Caractérisation du polynôme minimal

Le polynôme minimal de u (s'il existe) est le polynôme unitaire annulateur de u de plus bas degré possible.

35. \rightarrow L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ est un espace de dimension finie si, et seulement si, u admet un polynôme minimal μ_0 .

Dans ce cas, la sous-algèbre $\mathbb{K}[u] \subset L(E)$ des polynômes en u admet pour base

$$(I_E, u, \dots, u^{d-1})$$

avec $d = \dim \mathbb{K}[u] = \deg \mu_0$.

36. Cas des matrices

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

36.1 L'idéal annulateur de A n'est pas réduit au polynôme nul [23.3].

36.2 Il existe un, et un seul, polynôme $\mu_0 \in \mathbb{K}[X]$ qui soit un polynôme unitaire et annulateur de A et qui divise tous les polynômes annulateurs de A .

36.3 Le polynôme μ_0 est l'unique polynôme unitaire annulateur de A de plus bas degré possible.

36.4 \Leftrightarrow Le **polynôme minimal** de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme unitaire annulateur de A de plus bas degré possible.

36.5 Deux matrices ont même polynôme minimal si, et seulement si, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

36.6 \rightarrow Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors les polynômes minimaux de A et de u sont les mêmes.

37. Méthodes pour le calcul du polynôme minimal

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

37.1 Si P est un polynôme annulateur de A , alors le polynôme minimal de A est un diviseur unitaire de P .

37.2 Le degré du polynôme minimal de A est supérieur à n si, et seulement si, la famille (I, A, \dots, A^{n-1}) est libre.

37.3 Si u admet un polynôme minimal μ_0 et s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^N(x_0))$$

soit libre, alors le degré du polynôme minimal μ_0 est strictement supérieur à N .

37.4 Soit P , un polynôme annulateur de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, unitaire et de degré d . Si la famille

$$(I, A, \dots, A^{d-1})$$

est libre, alors P est le polynôme minimal de A .

38. Exemples

38.1 Les homothéties sont les endomorphismes qui ont un polynôme minimal de degré 1.

38.2 Le polynôme minimal d'un projecteur est $X(X - 1)$ en général.

38.3 Le polynôme minimal d'une symétrie est $(X - 1)(X + 1)$ en général.

38.4 → L'endomorphisme u est nilpotent d'indice d si, et seulement si, son polynôme minimal est X^d .

Entraînement

39. Questions pour réfléchir

1. Comparer les écritures $P(u)(x)$ et $P(u(x))$.
2. La dimension de $\mathbb{K}[u]$ est supérieure à 1. Cas d'égalité?
3. Comparer $[P(u)]^k$, $P(u^k)$ et $(P^k)(u)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
4. Si u est nilpotent, alors $I_E - u$ est inversible et son inverse est un polynôme en u .
5. Calculer $(\lambda I_E + u)^n$ lorsque u est un projecteur.
- 6.a Tout endomorphisme $f \in \mathbb{K}[u]$ commute à u .
- 6.b Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, si un endomorphisme f commute à u , alors il commute aussi à $P(u)$.
7. Un endomorphisme $u \in L(E)$ est nilpotent si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que X^p soit un polynôme annulateur de u .
- 8.a Le monôme X^{n+1} est un polynôme annulateur de la dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$.
- 8.b Le seul polynôme annulateur de la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.
9. Suite de [22.5] – Deux polynômes annulateurs de u ne peuvent être premiers entre eux.
10. Si $\dim E = d$, alors il existe un polynôme annulateur non nul de u dont le degré est inférieur à d^2 .
11. Si $P \mid Q$, alors $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } Q(u)$.
12. Décrire la sous-algèbre $\mathbb{K}[u] \subset L(E)$ lorsque u est un projecteur; une symétrie; un endomorphisme nilpotent.
13. Si une matrice A est semblable à une matrice nilpotente, alors elle est nilpotente.
14. Deux matrices nilpotentes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles semblables? équivalentes?
15. Si la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors la matrice $(I_n - A)$ est inversible et son inverse est un polynôme en A .
16. Soit u , un endomorphisme de E , espace vectoriel réel, tel que $u^2 = u - I_E$. Quel est le polynôme minimal de u ?
17. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est proportionnelle à son carré A^2 , quel peut être le polynôme minimal de A ? Et celui de A^2 ?
18. Comparer le polynôme minimal de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ aux polynômes minimaux des matrices

$$B = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

19. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Comparer les polynômes minimaux de A et de A^{-1} .
20. On suppose que u admet un polynôme minimal μ_0 . Comparer le polynôme minimal μ_λ de $u - \lambda I_E$ à μ_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
21. Suite de [24] – Si un polynôme annulateur non nul a un degré inférieur à $\dim \mathbb{K}[u]$, alors il est associé au polynôme minimal.
22. Un endomorphisme u admet au moins un vecteur propre si, et seulement si, son polynôme minimal admet au moins une racine dans \mathbb{K} .
23. Si E est un espace vectoriel réel et si le degré du polynôme minimal de $u \in L(E)$ est impair, alors il existe au moins une droite de E stable par u .
24. Si $\mu \in \mathbb{C}[X]$ est le polynôme minimal de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, alors le polynôme conjugué $\bar{\mu}$ est le polynôme minimal de la matrice conjuguée \bar{A} .
25. Préciser les cas particuliers de [38.2] et de [38.3].

40. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont mêmes polynômes annulateurs et même polynôme minimal.

41. Une matrice A et sa transposée A^\top ont même polynôme minimal.

42. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0_n.$$

1. Il y a sept polynômes minimaux possibles pour A .
2. Si A est inversible, il n'y a plus que trois polynômes minimaux possibles.
3. Si A est inversible et n'est pas une homothétie, alors son polynôme minimal est $X^2 - 3X + 2$.

43. Les polynômes minimaux des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont respectivement

$$\mu_1 = X^2 - 3X + 2 \quad \mu_2 = X^3 - X$$

$$\mu_3 = X^2 - X \quad \mu_4 = X^2 - 2X + 1.$$

44. On considère un endomorphisme u de E qui admet un polynôme minimal μ_0 . (On ne suppose pas pour autant que E est un espace de dimension finie.)

1. L'endomorphisme u est inversible si, et seulement si, il est injectif.
2. L'endomorphisme $P(u)$ est inversible si, et seulement si, les polynômes P et μ_0 sont premiers entre eux.
3. Si $P(u)$ n'est pas inversible, le polynôme P divise-t-il le polynôme minimal de u ?

45. Soit E , un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est un endomorphisme nilpotent d'indice n , alors pour tout vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, la famille

$$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

est une base de E . Expliciter la matrice de f relative à cette base.

46. Soient E , un espace vectoriel de dimension finie et u , un endomorphisme de E tel que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

1. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où A est une matrice inversible.

2. Il existe un polynôme P_1 tel que $P_1(0) = 0$ et $P_1(A) = I$.
3. La projection π sur $\text{Ker } u$ parallèlement à $\text{Im } u$ est un polynôme en u :

$$\pi = u - P_1(u).$$

III

Éléments propres

47. Une droite est stable par $u \in L(E)$ si, et seulement si, elle est dirigée par un vecteur x_0 tel que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x_0) = \lambda \cdot x_0.$$

Vecteurs propres

48.1 \Leftarrow Un vecteur $x \in E$ est un **vecteur propre** de l'endomorphisme $u \in L(E)$ lorsqu'il est distinct du vecteur nul 0_E et qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda \cdot x$.

48.2 \rightarrow La famille $(x_0, u(x_0))$ est liée si, et seulement si, le vecteur x_0 est nul ou propre pour u .

48.3 Si $\mathcal{D} = \mathbb{K} \cdot x_0$ où $u(x_0) = \lambda \cdot x_0$, alors

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad u(x) = \lambda \cdot x.$$

Valeurs propres

49. Soit $u \in L(E)$.

49.1 \Leftarrow Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u lorsque l'endomorphisme $(u - \lambda I_E)$ n'est pas injectif.

49.2 Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si, et seulement si, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda \cdot x$.

49.3 Si $u(x_0) = \lambda \cdot x_0 = \mu \cdot x_0$ et $x_0 \neq 0_E$, alors $\lambda = \mu$.

49.4 \Leftarrow La **valeur propre associée** à un vecteur propre x de u est l'unique scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

49.5 \rightarrow L'endomorphisme u est injectif si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de u .

49.6 \Leftarrow Le **spectre** de l'endomorphisme u est l'ensemble, noté $\text{Sp}(u)$, de ses valeurs propres.

49.7 Si E est un espace de dimension finie, alors λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\det(u - \lambda I_E) = 0$.

50. Valeurs propres et polynômes annulateurs

Soit $u \in L(E)$.

50.1 \rightarrow Si $u(x) = \lambda \cdot x$, alors

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(u)(x) = P(\lambda) \cdot (x).$$

50.2 \rightarrow Si P est un polynôme annulateur de u , alors toute valeur propre de u est une racine de P .

51. Racines et facteurs du polynôme minimal

On suppose que l'endomorphisme u admet un polynôme minimal μ_0 .

51.1 Si un polynôme non constant P divise le polynôme minimal de u , alors l'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif.

51.2 Si le polynôme minimal μ_0 et le polynôme Q sont premiers entre eux, alors l'endomorphisme $Q(u)$ est inversible.

51.3 \rightarrow Les racines du polynôme minimal de u sont les valeurs propres de u .

51.4 L'endomorphisme u est inversible si, et seulement si, son polynôme minimal μ_0 n'est pas divisible par X . Dans ce cas,

$$\mu_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$$

avec $a_0 \neq 0$ et l'inverse de u est un polynôme en u :

$$u^{-1} = \frac{-1}{a_0} (u^{d-1} + a_{d-1}u^{d-2} + \dots + a_1 I_E).$$

51.5 \rightarrow Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors le spectre de $u \in L(E)$ n'est pas vide et l'endomorphisme u admet au moins un vecteur propre.

52. Exemples de spectres

52.1 Le spectre de l'homothétie de rapport k est réduit à $\{k\}$.

52.2 Le spectre d'une projection est en général égal à $\{0, 1\}$.

52.3 Le spectre d'une symétrie est en général égal à $\{-1, 1\}$.

52.4 Le spectre d'un endomorphisme nilpotent est réduit au singleton $\{0\}$.

52.5 Le spectre d'une rotation de \mathbb{R}^2 est en général vide et celui d'une rotation de \mathbb{R}^3 est en général réduit à $\{1\}$.

Sous-espaces propres

53.1 \Leftarrow Soient $u \in L(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Le **sous-espace propre** de E associé à la valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$ est $\text{Ker}(u - \lambda I_E)$.

53.2 La dimension d'un sous-espace propre est toujours supérieure à 1.

53.3 \rightarrow Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v .

53.4 \triangleright Les sous-espaces propres de u sont stables par u .

54. Indépendance des sous-espaces propres

54.1 Soient x_1, \dots, x_r , des vecteurs appartenant aux sous-espaces propres de u respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Alors

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(u) \left(\sum_{k=1}^r x_k \right) = \sum_{k=1}^r Q(\lambda_k) \cdot x_k.$$

54.2 \rightarrow Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

54.3 \rightarrow Si E est un espace de dimension finie, le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de E est inférieur à $\dim E$.

54.4 \rightarrow Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre.

54.5 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$\varphi_\lambda = [x \mapsto x^\lambda]$$

est un vecteur propre, associé à la valeur propre λ , de l'endomorphisme u de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ défini par

$$\forall x \in I, \quad u(f)(x) = x f'(x)$$

donc la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est libre. \rightarrow [1.32]

Traduction matricielle

55. Éléments propres d'une matrice

55.1 \Leftarrow Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) < n.$$

Le **spectre** de A est l'ensemble de ses valeurs propres.

55.2 Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, la matrice $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.

55.3 Si $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$.

55.4 \rightarrow Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors le cardinal du spectre de A est inférieur à n .

55.5

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{Sp}(A) = [\det(A - \lambda I_n) = 0].$$

55.6 \Leftarrow Les **vecteurs propres** de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ associés à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ sont les matrices colonnes $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $AX = \lambda X$.

55.7 \Leftarrow Le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ est $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

55.8 \rightarrow Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

55.9 \rightarrow Deux matrices semblables ont même spectre et les sous-espaces propres associés à une même valeur propre sont isomorphes.

55.10 \rightarrow Une matrice et sa transposée ont même spectre. De plus, les sous-espaces propres de A et de A^\top qui sont associés à une même valeur propre sont isomorphes.

56. \rightarrow Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L} , alors le spectre de la matrice M est contenu dans le spectre de M vue comme une matrice appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{L})$.

57. Spectre complexe d'une matrice réelle

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Le spectre de A est, par définition, une partie de \mathbb{R} . Mais une telle matrice peut toujours être considérée comme un élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

57.1 \Leftrightarrow Le spectre complexe de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble, noté $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, des racines complexes de l'équation

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

57.2 Le spectre complexe de A est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle tel que $AX = \lambda X$.

57.3 Soient λ , un réel qui appartient au spectre complexe de A et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, un vecteur propre de A associé à λ .

Que penser des vecteurs $X + \bar{X}$ et $X - \bar{X}$?

57.4 *

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Sp}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}.$$

Entraînement

58. Questions pour réfléchir

1. Si $\text{rg } u = 1$, alors l'image de u est dirigée par un vecteur propre de u .
2. Les vecteurs propres de u appartiennent-ils à $\text{Im } u$?
3. Pourquoi un vecteur propre doit-il être par définition distinct du vecteur nul?
4. Un endomorphisme u admet 0 pour valeur propre si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que u^n admette 0 pour valeur propre.
5. Le spectre de la dérivation en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ est réduit à $\{0\}$. En tant qu'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la dérivation admet \mathbb{R} pour spectre.
6. Le spectre de l'endomorphisme $[P \mapsto XP]$ de $\mathbb{K}[X]$ est vide.
7. Tout vecteur d'un sous-espace propre est-il un vecteur propre?
8. Le noyau d'un endomorphisme est-il un sous-espace propre?
9. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comparer le sous-espace propre de u associé à λ et le sous-espace propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.
10. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Si x est un vecteur propre pour u , le vecteur $v(x)$ est-il un vecteur propre pour u ? Dans ce cas, à quelle valeur propre est-il associé?
11. On note $E_k, 1 \leq k \leq r$, les sous-espaces propres d'un endomorphisme. Pour tout $1 \leq k \leq r$, on considère une famille libre $(x_i^k)_{1 \leq i \leq n_k}$ constituée de vecteurs de E_k . Alors la famille

$$(x_i^k)_{1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq r}$$

est libre.

12. Quelle que soit la base \mathcal{B} de E , la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et l'endomorphisme $u \in L(E)$ ont même spectre. Comparer les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de u .

13. Suite de [55.9] – Expliciter un isomorphisme.

14. Deux matrices équivalentes ont-elles les mêmes valeurs propres?

15. Condition pour que deux matrices diagonales soient semblables?

16. Comparer les spectres réel et complexe d'une matrice de rotation $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$; d'une matrice de rotation $A \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

59. Les matrices suivantes ont-elles 0 pour valeur propre?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

60. Les matrices suivantes ont des valeurs propres évidentes : lesquelles?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

61. Les matrices suivantes ont-elles 1 pour valeur propre?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

62. Les matrices suivantes ont des vecteurs propres en commun. Lesquels?

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

63. On considère un endomorphisme $u \in L(E)$ dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si $v \in L(E)$ commute à u , alors tout vecteur propre de u est aussi un vecteur propre de v .

64. **Espaces propres et image d'un endomorphisme**

1. Un sous-espace propre de u associé à une valeur propre non nulle est contenu dans $\text{Im } u$.
2. Si p est un projecteur (non identiquement nul), alors $\text{Im } p$ est un sous-espace propre de p .
3. Si l'image de $u \in L(E)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, l'endomorphisme u est-il un projecteur?
4. Quels sont les endomorphismes u tels que $\text{Im } u$ soit un sous-espace propre?

65. **Endomorphismes conjugués**

Soient u et v , deux endomorphismes de E et F (respectivement), tels que

$$v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

où φ est un isomorphisme de E sur F . Comparer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u et de v , ainsi que les sous-espaces stables par u et par v respectivement.

66. **Caractérisation des homothéties**

Soit u , un endomorphisme de E .

1. Si x et y sont deux vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes, alors $x + y$ n'est pas un vecteur propre de u .
2. Si tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de u , alors u est une homothétie.

67. Valeurs propres et vecteurs propres de l'application qui, à $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, associe la primitive de f qui s'annule en 0.

68. Soit E , l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} qui s'annulent en 0. Pour $f \in E$, on pose

$$\varphi(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Valeurs propres et vecteurs propres de φ .

69. **Spectre de la dérivation discrète [4.4]**

1. Valeurs propres et vecteurs propres de Δ .
2. Le sous-espace $F = \ell^\infty(\mathbb{C})$ est stable par Δ . Valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme induit par restriction de Δ à F .

70. à une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on associe l'application u définie par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(M) = AM.$$

L'endomorphisme u et la matrice A ont mêmes valeurs propres. Décrire les sous-espaces propres de u en fonction des sous-espaces propres de A .

71. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

Soit (X_1, \dots, X_n) , une famille libre de vecteurs propres de A . On suppose que X_1, \dots, X_r sont associés à des valeurs propres non nulles et que X_{r+1}, \dots, X_n appartiennent au noyau de A .

Alors les $2n$ matrices colonnes

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_r \\ X_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_r \\ -X_r \end{pmatrix}, \dots, \\ \begin{pmatrix} X_{r+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ X_{r+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ X_n \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de vecteurs propres de B .

72. Hyperplans stables

Soient E , un espace de dimension finie; \mathcal{B} , une base de E ; f , un endomorphisme de E et H , un hyperplan de E .

1. Il existe une forme linéaire non nulle u dont le noyau est égal à H :

$$H = [u(x) = 0]$$

et l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, la forme linéaire $u \circ f$ est proportionnelle à u .

2. L'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $\text{Im}(f + \lambda I) \subset H$.

3. Soient $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $L = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

3.a Quelles sont les tailles respectives de A et de L ?

3.b L'hyperplan H est stable par f si, et seulement si, L^\top est un vecteur propre de A^\top .

4. En déduire les sous-espaces stables par chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

IV

Polynôme caractéristique

73. Rappel sur les permutations

73.1 \nrightarrow Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des entiers $1 \leq k \leq n$ tels que $\sigma(k) \neq k$.

73.2 Ou bien le support d'une permutation est vide, ou bien il compte au moins deux éléments.

74. Rappels sur les polynômes

74.1 \rightarrow Si P_1, P_2, \dots, P_r sont des polynômes tels que

$$\forall 2 \leq k \leq r, \quad \deg P_k < \deg P_1,$$

alors le degré de la somme $(P_1 + P_2 + \dots + P_r)$ est égal à $\deg P_1$.

74.2 \rightarrow Si le polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ est scindé, alors la somme des racines de P est égale à $-a_{d-1}/a_d$ et le produit des racines de P est égal à $(-1)^d a_0/a_d$.

75. Cas d'une matrice

75.1 \nrightarrow Le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale

$$[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)]$$

de \mathbb{K} dans \mathbb{K} .

75.2 Il est plus simple de calculer $\det(A - \lambda I_n)$, qui donne le polynôme caractéristique au signe près.

75.3 \rightarrow Le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré n , de la forme :

$$X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

et ses racines sont les valeurs propres de A .

75.4 Si la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire (en particulier si elle est diagonale), alors son polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_{i,i}).$$

75.5 \rightarrow Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

75.6 Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

76. Cas d'un endomorphisme

On se restreint ici aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

76.1 \nrightarrow Si $A = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors le polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A .

76.2 \rightarrow Le degré du polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est égal à $\dim E$ et ses racines sont les valeurs propres de u .

76.3 Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors le spectre d'un endomorphisme de E n'est jamais vide.

76.4 \rightarrow Si u_F est l'endomorphisme induit par restriction de u à un sous-espace stable F , alors le polynôme caractéristique de u_F divise le polynôme caractéristique de u .

Multiplicité d'une valeur propre

77. \nrightarrow La multiplicité de la valeur propre λ de A est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A .

78. Interprétation géométrique

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

78.1 Si la dimension du sous-espace propre $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est égale à d , alors la matrice A est semblable à une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_d & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique de A est divisible par $(X - \lambda)^d$.

78.2 \rightarrow Si λ est une valeur propre de A de multiplicité m_λ , alors

$$1 \leq \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) \leq m_\lambda.$$

Entraînement

79. Questions pour réfléchir

1. Pour tout $2 \leq k \leq n$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ dont le support compte k éléments.

2. Soient σ et τ dans \mathfrak{S}_n .

2.a Comparer les supports de σ et de $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

2.b Le support de $\sigma \circ \tau$ est contenu dans l'union des supports de σ et de τ . Étudier le cas d'égalité.

3. Pourquoi est-il important de calculer le polynôme caractéristique sous forme factorisée ?

4. Que dire du polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs ? triangulaire par blocs ?

5. La définition [76.1] a bien un sens.

80. Suite de [6] – Si $\dim E = n$ et $\text{rg } u = 1$, alors le polynôme caractéristique de u est $X^{n-1}(X - \text{tr } u)$.

81. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.

82. Soit $a \in \mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2a - 1 \end{pmatrix}$$

est $X[X^2 - (2a + 1)X - 2(a - 1)^2]$.

83. Les polynômes caractéristiques des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & 1 \\ | & & | & | \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 \\ 1 & \text{---} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & -1 \\ | & & | & | \\ 0 & \text{---} & 0 & -1 \\ 1 & \text{---} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont égaux à $X^{n-2}[X^2 - (n - 1)]$ et à $X^{n-2}[X^2 + n - 1]$ respectivement.

84. Si le polynôme caractéristique de $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est égal à

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0,$$

alors le polynôme caractéristique de A^{-1} est associé à

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + 1.$$

85. Suite de [71] – Comme les matrices $\lambda I_{2n} - B$ et

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & -A \\ 0 & \lambda I + A \end{pmatrix}$$

sont équivalentes, alors $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda)\chi_A(-\lambda)$.

86. Le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

est égal à

$$(X - n) \prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \neq n-1}} (X - k) + \sum_{k=0}^{n-2} \prod_{\substack{0 \leq j < n \\ j \neq k}} (X - j)$$

donc le scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - j} = 1.$$

87. Polynômes de Tchebychev

Pour tout $n \geq 2$, on note $P_n = \det(A_n - XI_n)$ où

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose $P_1 = -X$.

1. $P_2 = X^2 - 1$
- 2.

$$\forall n \geq 1, P_{n+2} = -XP_{n+1} - P_n.$$

3. Soit $-2 < x < 2$.
- 3.a Il existe un unique $0 < \alpha < \pi$ tel que $x = -2 \cos \alpha$.
- 3.b

$$\forall n \geq 1, P_n(x) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

4. Le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes et la matrice A_n est diagonalisable [90.4].

5. Si X_1 et X_2 sont deux vecteurs propres de A_n associés à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 , alors $X_1^T X_2 = 0$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Endomorphismes diagonalisables

88. On considère un espace vectoriel E dont la dimension est finie.

88.1 → Lemme fondamental

La matrice d'un endomorphisme u relative à une base \mathcal{B} de E est diagonale si, et seulement si, cette base \mathcal{B} est constituée de vecteurs propres de u .

88.2 ↯ Une endomorphisme u de E est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u .

89. Traduction matricielle

89.1 ↯ Une matrice carrée est diagonalisable lorsque elle est semblable à une matrice diagonale.

89.2 L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable quelle que soit la base choisie \mathcal{B} .

89.3 → La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Caractérisations géométriques

90. On peut caractériser les endomorphismes diagonalisables en étudiant leurs sous-espaces propres. L'intérêt de ce point de vue est de rendre superflu le choix d'une base.

90.1 → Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement si, l'espace E est la somme directe des sous-espaces propres de u .

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda I_E)$$

90.2 En pratique, si l'endomorphisme u est diagonalisable, alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe une, et une seule, famille de vecteurs $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ tels que

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} x_\lambda \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad u(x_\lambda) = \lambda \cdot x_\lambda.$$

90.3 → Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement si,

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

90.4 → Si $\dim E = n$ et si $u \in L(E)$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

90.5 Si u est diagonalisable et n'a qu'une seule valeur propre, alors u est une homothétie.

91. → Un endomorphisme $u \in L(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad \dim \text{Ker}(u - \lambda I_E) = m_\lambda.$$

Entraînement

92. Questions pour réfléchir

1. Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, sa transposée est diagonalisable.
2. Si A est diagonalisable, alors $Q(A)$ est diagonalisable, quel que soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
3. Une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont égaux est diagonalisable si, et seulement si, c'est une matrice d'homothétie.
4. Quelles sont, parmi les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices diagonalisables? →[101]

5. Soient u , un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$. Comparer les sous-espaces propres de u et de $P(u)$.
6. Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres de u sont des droites.
7. Si u est diagonalisable, le polynôme caractéristique de u est-il scindé? à racines simples?
8. S'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonalisable, alors u est diagonalisable.
9. Soit E , un espace de dimension finie. L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si,

$$\dim E \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

93. On suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et que $\text{Sp}(u) = (\lambda_k)_{1 \leq k \leq r}$. Alors le polynôme

$$P_0 = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)$$

est un polynôme annulateur de u .

94. Diagonaliser les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

95. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A_0 = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. La matrice A est-elle diagonalisable?

96. On note J , la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. La matrice J est diagonalisable. Préciser son spectre et ses sous-espaces propres.
2. La matrice J est proportionnelle à une matrice de projection. Que peut-on en déduire?
3. Spectre et sous-espaces propres des matrices

$$M(a, b) = (b - a)I + aJ$$

dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à $b \in \mathbb{C}$ et dont les autres coefficients sont tous égaux à $a \in \mathbb{C}$.

97. Endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$

97.1 L'application f qui, à un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Est-il inversible? diagonalisable?

97.2 L'application φ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = P - (X + 1)P'$$

est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

97.3 Matrice, relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, de l'application φ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

97.4 Soient a et b , deux réels distincts. L'application φ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

est diagonalisable.

98. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice admettant n valeurs propres distinctes.

98.1 Si A est diagonale, alors les matrices qui commutent à A sont les matrices diagonales (par un calcul matriciel direct).

98.2 Si une matrice commute à A , alors elle est diagonalisable (par un calcul matriciel ou en appliquant [53.3]). Étudier la réciproque. →[191]

99. Racines carrées d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$, diagonalisable. Si E est un espace vectoriel complexe, il existe $v \in \mathbb{K}[u]$ tel que $u = v^2$. Étudier le cas où E est un espace vectoriel réel.

100. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible?

Si une matrice $R \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors elle commute à A et il existe une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}RP$ soient diagonales [63].

Résoudre l'équation $R^2 = A$.

101. Matrices de rang 1 [14.2]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice dont le rang est égal à 1.

1. Caractérisation des sous-espaces propres de A en fonction de U et V .
2. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est différente de 0.

102. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & yx & zx \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ ou $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Commenter le cas où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

103. L'endomorphisme f de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} M$$

est-il diagonalisable? inversible? →[70]

104. Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

sont égaux à $X^n - 1$. La matrice A est diagonalisable et

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathbb{C} \cdot (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$$

pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

VI

Endomorphismes trigonalisables

105. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

106. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice semblable à une matrice triangulaire T .

106.1 Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A .

106.2 Le polynôme caractéristique de A est scindé.

106.3 La matrice $P(A)$ est trigonalisable, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

107. On considère un espace vectoriel E de dimension finie.

107.1 Une endomorphisme $u \in L(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

107.2 Dans une base convenable, la matrice d'un endomorphisme nilpotent est triangulaire. →[111]

107.3 Si l'endomorphisme u est trigonalisable, alors la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable, quelle que soit la base \mathcal{B} .

107.4 Une matrice carrée est trigonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme canoniquement associé à cette matrice est trigonalisable.

VI.1 Caractérisations

108. → Caractérisation géométrique

Soit $n = \dim E$. Un endomorphisme u de E est trigonalisable si, et seulement si, il existe une famille $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ de sous-espaces vectoriels stables par u tels que

$$\{0_E\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E.$$

En particulier, $\dim F_k = k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

109. Caractérisation polynomiale

Soit χ_n , le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

109.1 Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice $A_{n-1} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique χ_{n-1} de A_{n-1} est défini par

$$\chi_n = (X - \lambda)\chi_{n-1}.$$

109.2→ Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

109.3→ Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

110. → Expressions de la trace et du déterminant

On suppose que le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé :

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

110.1 La trace de A est la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda \lambda.$$

110.2 Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}.$$

VI.2 Réduction d'un endomorphisme nilpotent

111. Soit $u \in L(E)$.

111.1 La suite des sous-espaces $\text{Ker } u^i$ est croissante :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker } u^i \subset \text{Ker } u^{i+1}.$$

111.2 Si $\text{Ker } u^{i+1} = \text{Ker } u^i$, alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{Ker } u^{i+j} = \text{Ker } u^i.$$

111.3 Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$,

$$u_*(\text{Ker } u^{i+1}) \subset \text{Ker } u^i.$$

111.4 Si u est nilpotent, alors il existe un entier d tel que

$$\text{Ker } u \subsetneq \text{Ker } u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } u^{d-1} \subsetneq \text{Ker } u^d = E.$$

111.5 Si $u \in L(E)$ est nilpotent, alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit une matrice triangulaire supérieure stricte.

111.6→ Un endomorphisme u est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

111.7 Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n .

112. En pratique, il suffit de savoir trigonaliser les matrices nilpotentes pour pouvoir trigonaliser toutes les matrices trigonalisables. →[134.4]

113. Exemples

113.1 Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

le noyau de u est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$ et le noyau de u^2 est le plan d'équation $[x - z = 0]$.

2. Choisir un vecteur e_3 qui n'appartient pas à $\text{Ker } u^2$. La famille

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = (u^2(e_3), u(e_3), e_3)$$

est une base de E [45] et la matrice de u relative à cette base est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

113.2 Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est nilpotente d'indice 2 et son noyau est représenté par l'équation

$$x + 2y + z = 0.$$

2. Le théorème de la base incomplète [111.5] permet de construire une base \mathcal{B}_1 telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ soit triangulaire supérieure : on choisit une base (e_1, e_2) de $\text{Ker } u$ et un vecteur e_3 qui n'appartient pas à $\text{Ker } u$. Vérifier que la matrice de u relative à une telle base est bien de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Comment choisir un vecteur e_3 qui appartienne à $\text{Ker } u^2$ mais pas à $\text{Ker } u$? Le vecteur $e_2 = u(e_3)$ appartient à $\text{Ker } u$. Comment trouver un vecteur e_1 tel que (e_1, e_2) soit une base de $\text{Ker } u$? La famille $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, e_3)$ est alors une base de \mathbb{R}^3 et la matrice de u relative à \mathcal{B}_2 est la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

113.3 Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A^2 est la matrice nulle et le noyau de u est un plan de \mathbb{R}^4 .

2. Déterminer une famille libre (e_3, e_4) de vecteurs qui n'appartiennent pas à $\text{Ker } u$. Le couple

$$(e_1, e_2) = (u(e_3), u(e_4))$$

est une base de $\text{Ker } u$; la famille

$$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

est une base de \mathbb{R}^4 et la matrice de u relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer une base \mathcal{B}_2 de \mathbb{R}^4 telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Il n'existe pas de base de \mathbb{R}^4 dans laquelle la matrice de u soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

113.4 Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le noyau de u^2 est représenté par l'équation $[x - z = 0]$ et A^3 est la matrice nulle.

2. Comment choisir $\varepsilon_4 \in \text{Ker } u^3 \setminus \text{Ker } u^2$? On pose

$$\varepsilon_3 = u(\varepsilon_4) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = u^2(\varepsilon_4).$$

Comment choisir $\varepsilon_1 \in \text{Ker } u$ de telle sorte que la famille

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

soit une base de \mathbb{R}^4 ? Quelle est la matrice de u relative à cette base \mathcal{B} ? Faire le lien avec [111.5].

Entraînement

114. Questions pour réfléchir

1. Suite de [109.3] – Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice qui n'est pas diagonalisable. Discuter l'intérêt de réduire A sous forme triangulaire

1.a pour calculer les puissances de A [157];

1.b pour résoudre un système différentiel associé à A [162].

2. Le spectre d'un endomorphisme nilpotent $u \in L(E)$ est réduit à $\{0\}$. Si le spectre d'un endomorphisme u est réduit à $\{0\}$, cet endomorphisme est-il nilpotent?

3. Suite de [111] – Pour $u \in L(E)$, étudier la suite des sous-espaces $(\text{Im } u^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

4. Suite de [111.7] – Si le polynôme caractéristique de u est égal à X^n , alors u est nilpotent.

5. Un endomorphisme nilpotent est-il diagonalisable?

115. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont semblables. La matrice A est-elle diagonalisable?

116. Soit f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -8 & 1 & 6 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

116.1 Le polynôme caractéristique de A est $(X+1)^2(X-3)$. Cette matrice est inversible, mais pas diagonalisable.

116.2 On pose

$$e_1 = (1, 2, 2), \quad e_2 = \mu \cdot (1, 1, 1), \quad e_3 = (0, 1, 0) + \lambda \cdot e_2.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base si, et seulement si, $\mu \neq 0$.

116.3 La matrice A est trigonalisable et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pour un choix convenable de λ et μ . →[164]

117. Suite de [72] – Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont semblables. Sous-espaces stables par A ?

118. Matrices nilpotentes

1. Une matrice triangulaire est nilpotente si, et seulement si, chaque coefficient diagonal est nul.

2. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $A^2 = 0$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et à} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$ est semblable à →[45]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Condition pour qu'une matrice triangulaire par blocs soit nilpotente?

119. Soit u , un endomorphisme nilpotent de E . On sait [29.2] que l'indice de nilpotence d de u est inférieur à $\dim E$. On étudie ici le cas d'égalité.

1. La dimension m de $\text{Ker } u$ est supérieure à 1.

2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_{p_k}) , une base de $\text{Ker } u^k$.

2.a Il existe des vecteurs $e_{p_k+1}, \dots, e_{p_{k+1}}$ tels que

$$(e_1, \dots, e_{p_k}, e_{p_k+1}, \dots, e_{p_{k+1}})$$

soit une base de $\text{Ker } u^{k+1}$.

2.b Les vecteurs $u^k(e_{p_k+1}), \dots, u^k(e_{p_{k+1}})$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\text{Ker } u$.

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$k \leq \dim(\text{Ker } u^k) \leq k \dim(\text{Ker } u)$$

et l'indice de nilpotence d de u vérifie :

$$\frac{\dim E}{\dim(\text{Ker } u)} \leq d \leq \dim E.$$

En particulier, $d = \dim E$ si, et seulement si, $\dim(\text{Ker } u) = 1$.

120. On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 6 & -5 \\ -5 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

120.1 Avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$P_1^{-1} A_0 P_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc deux plans F_1 et F_2 supplémentaires dans E et stables par u .

120.2 On considère

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$Q^{-1} N Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il existe une matrice inversible P_2 telle que la matrice $P_2^{-1} A_0 P_2$ soit triangulaire supérieure.

120.3 Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A_0 sont égaux.

120.4 Selon le vecteur $x \in E$ choisi, le rang de la famille

$$(x, u(x), u^2(x), u^3(x))$$

est égal à 0, 1, 2, 3 ou 4.

121. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et P , son polynôme caractéristique. Pour tout $x \notin \text{Sp}(A)$,

$$\text{tr}[(xI_n - A)^{-1}] = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \frac{m_\lambda}{x - \lambda} = \frac{P'(x)}{P(x)}$$

où m_λ est la multiplicité de $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

122.

1. On considère un espace vectoriel de dimension $(n + 1)$ et deux endomorphismes u et v . On suppose que v est nilpotent et que $u \circ v = v \circ u$.

1.a Le sous-espace $\text{Im } v$ est un sous-espace de dimension inférieure à n , stable par u et par v .

1.b Si u' et v' sont les endomorphismes induits par restriction de u et v à $\text{Im } v$, alors v' est nilpotent et $u' \circ v' = v' \circ u'$.

1.c Quelle est la forme des matrices de u et de v dans une base adaptée à $\text{Im } v$?

2. En déduire que : pour tout espace E de dimension finie, si $v \in L(E)$ est nilpotent et si $u \in L(E)$ commute à v , alors

$$\det(u + v) = \det u.$$

123. Soient A et B , deux matrices carrées complexes. On suppose que la matrice $B \neq 0$ est nilpotente et que $AB = 0$.

1. Les matrices A et B sont semblables à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les matrices A et $A + B$ ont même spectre.

VII

Étude algébrique des endomorphismes

124. Réduction des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$

Le polynôme minimal μ d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est scindé et son degré est inférieur à 2.

124.1 Si $\mu = (X - \lambda)$, alors $A = \lambda I_2$.

124.2 Si $\mu = (X - \lambda)(X - \mu)$, alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

124.3 Si $\mu = (X - \lambda)^2$, alors A est semblable à \rightarrow [118]

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

125. Réduction des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

Outre les trois cas vus pour les matrices complexes, il se peut que le polynôme minimal μ de $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ne soit pas scindé. Dans ce cas, la matrice A n'est ni diagonalisable, ni trigonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Elle est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det A \\ 1 & \text{tr } A \end{pmatrix}.$$

VII.1 Théorème de décomposition des noyaux

126. Convention

On suppose désormais que E est un espace de dimension finie.

127. \rightarrow Lemme de Bezout

Soit $P = P_1 P_2 \cdots P_r$, une factorisation en polynômes deux à deux premiers entre eux. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on note Q_i , le quotient de la division euclidienne de P par P_i :

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad P = P_i Q_i.$$

Il existe des polynômes A_1, \dots, A_r tels que

$$\sum_{i=1}^r A_i Q_i = 1.$$

128. Suite de [127] – On suppose que P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u .

128.1 Les endomorphismes définis par

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad p_i = (A_i Q_i)(u) \in \mathbb{K}[u]$$

sont des projecteurs tels que

$$\sum_{i=1}^r p_i = I_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0.$$

128.2 Ces projecteurs sont associés à une décomposition en somme directe de E : \rightarrow [1.89]

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im } p_i.$$

128.3 Chaque sous-espace $\text{Im } p_i$ est stable par u [2.45.5] et P_i est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par restriction de u à $\text{Im } p_i$:

$$\forall 1 \leq i \leq r, \quad \text{Im } p_i = \text{Ker}[P_i(u)].$$

128.4 → Théorème de décomposition des noyaux

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u dont on connaît une factorisation en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux :

$$P = P_1 P_2 \cdots P_r,$$

alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}[P_i(u)]$$

et les projections $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ associées à cette décomposition en somme directe sont des polynômes en u [128.1].

129. Exemples

129.1 Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. En calculant $(A - I_3)$ et $(A - 2I_3)$, on constate que

$$P = (X - 1)(X - 2)$$

est un polynôme annulateur de u .

2. Comme $-(X - 2) + (X - 1) = 1$, on pose

$$p_1 = 2I - u \quad \text{et} \quad p_2 = u - I = I - p_1.$$

On en déduit que les valeurs propres de u sont 1 et 2, ainsi que les sous-espaces propres de u :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u - I) &= [x - y - 2z = 0], \\ \text{Ker}(u - 2I) &= \text{Im}(u - I) = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1). \end{aligned}$$

129.2 Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. En explicitant les matrices $(A + I_3)$, $(A - I_3)$ et $(A - 2I_3)$, on constate facilement que le polynôme

$$P = (X + 1)(X - 1)(X - 2)$$

est un polynôme annulateur de u .

2. En posant

$$Q_1 = X^2 - 3X + 2, \quad Q_2 = X^2 - X - 2, \quad Q_3 = X^2 - 1,$$

on obtient

$$\frac{1}{6}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 + \frac{1}{3}Q_3 = 1.$$

3. Il suffit d'expliciter les matrices

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{6}(A - I_3)(A - 2I_3), \\ \Pi_2 &= -\frac{1}{2}(A + I_3)(A - 2I_3), \\ \Pi_3 &= \frac{1}{3}(A + I_3)(A - I_3) \end{aligned}$$

pour en déduire les éléments de réduction de u :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(u + I) &= \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1), \\ \text{Ker}(u - I) &= \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1), \\ \text{Ker}(u - 2I) &= \mathbb{R} \cdot (1, 1, 2). \end{aligned}$$

Cas général du théorème de décomposition

130. Suite de [127] – On revient au cas général : on ne suppose plus que P est un polynôme annulateur de u et on considère encore les endomorphismes définis par

$$p_i = A_i(u) \circ Q_i(u)$$

pour tout $1 \leq i \leq r$.

130.1 Chaque sous-espace $\text{Ker } P_i(u)$ est contenu dans le noyau de p_j , quel que soit $j \neq i$.

130.2

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^r p_i(x).$$

130.3 Si $x_i \in \text{Ker } P_i(u)$ pour tout $1 \leq i \leq r$, alors

$$x_i = \left(\sum_{j=1}^r p_j \right) (x_i) = p_i(x_i) = p_i \left(\sum_{j=1}^r x_j \right).$$

Les sous-espaces $\text{Ker } P_i(u)$ sont donc en somme directe.

130.4 → Si $P = P_1 P_2 \cdots P_r$ est une factorisation en polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u).$$

131. Exemple

131.1 Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - I_3)^2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le polynôme

$$P_0 = (X - 1)^2(X + 1)$$

est un polynôme annulateur de u .

2. Les projections p_1 et p_2 associées à la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - I)^2 \oplus \text{Ker}(u + I)$$

sont représentées dans la base canonique par les matrices

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(3I_3 - A)(A + I_3) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{4}(A - I_3)^2 = I_3 - \Pi_1.$$

3. On choisit un vecteur ε_3 dans le sous-espace propre $\text{Ker}(u + I) = \text{Im } p_2$; puis un vecteur ε_2 dans le plan

$$\text{Ker}(u - I)^2 = [x - z = 0],$$

sans être un vecteur propre de u . Le vecteur $\varepsilon_1 = u(\varepsilon_2)$ est alors un vecteur propre de u associé à 1.

4. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et la matrice de u relative à cette famille est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. On s'intéresse aux sous-espaces propres de u en considérant le polynôme $P = 1 - X^2$.

- 5.a Comme

$$P(A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la somme des sous-espaces propres de u est le plan d'équation $[x - y - 2z = 0]$.

- 5.b Une colonne C représente un vecteur propre ou la somme de deux vecteurs propres de u si, et seulement si,

$$C = \frac{1}{2}(A + I_3)C + \frac{1}{2}(I_3 - A)C.$$

VII.2 Caractérisation polynomiale des endomorphismes diagonalisables

132. On peut enfin caractériser les endomorphismes diagonalisables par l'étude de leurs polynômes annulateurs.

132.1 Si u est diagonalisable, alors le polynôme

$$\mu_0 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

est le polynôme minimal de u et

$$1 \leq \deg(\mu_0) = \#(\text{Sp}(u)) \leq \dim E.$$

132.2 → Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. L'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
3. Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

133. Restriction à un sous-espace stable

On suppose que F est un sous-espace stable par $u \in L(E)$ et on note u_F , l'endomorphisme de F induit par restriction de u .

133.1 Le spectre de u_F est contenu dans le spectre de u et les sous-espaces propres de u_F sont contenus dans les sous-espaces propres de u .

133.2 → Le polynôme minimal de u_F divise le polynôme minimal de u .

133.3 → Si u est un endomorphisme diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u , alors l'endomorphisme u_F de F induit par restriction de u est diagonalisable et

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (F \cap \text{Ker}(u - \lambda I_E)).$$

VII.3 Trigonalisation d'une matrice

134. Soit $u \in L(E)$, un endomorphisme admettant un polynôme annulateur scindé.

134.1 Si un polynôme annulateur de u admet pour factorisation :

$$P_0 = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$$

alors [17.2] les sous-espaces $F_k = \text{Ker}(u - \lambda_k I_E)^{m_k}$ sont stables par u .

134.2 Pour tout $1 \leq k \leq r$, l'endomorphisme u_k induit par restriction de u à F_k est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent de F_k :

$$u_k = \lambda_k I_{F_k} + (u_k - \lambda_k I_{F_k}).$$

134.3 → Si l'endomorphisme u admet un polynôme annulateur scindé, alors il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u :

$$E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$$

tels que, pour tout $1 \leq k \leq r$, l'endomorphisme de F_k induit par restriction de u est la somme de l'homothétie de rapport λ_k et d'un endomorphisme nilpotent.

134.4 Pour tout $1 \leq k \leq r$, il existe [111.5] une base \mathcal{B}_k de F_k dans laquelle la matrice de u_k est de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & * & \dots & * \\ 0 & \diagdown & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

134.5 Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\text{Diag}(A_1, \dots, A_r).$$

135. Exemples

135.1 Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme $P = (X - 1)^2(X - 2)^2$ est un polynôme annulateur de A .

2. Comme [127]

$$(2X - 1)(X - 2)^2 + (5 - 2X)(X - 1)^2 = 1,$$

on pose [128.4]

$$\Pi_1 = (2A - I_4)(A - 2I_4)^2 \quad \text{et} \quad \Pi_2 = (5I_4 - 2A)(A - I_4)^2.$$

On peut vérifier que

$$(A - I_4)\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et que

$$(A - 2I_4)\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Il existe une matrice $Q \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et P est le polynôme minimal de A .

135.2 Soit $u \in L(\mathbb{R}^4)$, représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme $P = (X - 1)^3(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A .

2. Comme

$$(X^2 - 4X + 7)(X + 1) - (X - 1)^3 = 8,$$

on pose

$$\Pi_1 = \frac{1}{8}(A^2 - 4A + 7I_4)(A + I_4)$$

$$\Pi_2 = \frac{-1}{8}(A - I_4)^3 = I_4 - \Pi_1.$$

On déduit de Π_2 que le sous-espace $\text{Ker}(u + I)$ est la droite dirigée par le vecteur $(1, 0, -1, -1)$ et que le sous-espace $\text{Ker}(u - I)^3$ est l'hyperplan d'équation $[2y + z - t = 0]$.

3. On déduit de $(A - I_4)^2$ qu'en prenant $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, la famille

$$(\varepsilon_1, (u - I)(\varepsilon_1), (u - I)^2(\varepsilon_1))$$

est une base de l'hyperplan $\text{Ker}(u - I)^3$.

4. La matrice A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

VII.4 Sous-espaces caractéristiques

136. → Théorème de Cayley-Hamilton

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors le polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est un polynôme annulateur de u . →[147]

137.1 Le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u .

137.2→ Le degré du polynôme minimal de $u \in L(E)$ est inférieur à la dimension de E .

137.3 Le polynôme minimal de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au polynôme caractéristique de A si, et seulement si, les matrices

$$I_n, A, \dots, A^{n-1}$$

sont linéairement indépendantes.

138. On suppose ici que le polynôme caractéristique de u est scindé.

$$\chi = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

138.1↔ Les sous-espaces caractéristiques de E sont les noyaux

$$C_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I_E)^{m_\lambda}$$

pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

138.2→ Si le polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est scindé, alors la famille des sous-espaces caractéristiques est une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda I_E)^{m_\lambda}$$

où chaque sous-espace $\text{Ker}(u - \lambda I_E)^{m_\lambda}$ est stable par u .

138.3 Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note u_λ , l'endomorphisme de C_λ induit par restriction de u .

L'endomorphisme $u_\lambda - \lambda I_{C_\lambda}$ est nilpotent et son indice de nilpotence est inférieur à m_λ .

138.4→ Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$,

$$\dim C_\lambda = m_\lambda.$$

138.5 L'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques coïncident :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad \text{Ker}(u - \lambda I_E) = \text{Ker}(u - \lambda I_E)^{m_\lambda}.$$

Entraînement

139. Questions pour réfléchir

1. Appliquer [128.4] et reconnaître les projections p_i :
 - 1.a quand u est un projecteur avec $P = X(X - 1)$;
 - 1.b quand u est une symétrie avec $P = (X - 1)(X + 1)$.
2. Suite de [128.1] – Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ et α_{r+1} , des scalaires deux à deux distincts. On suppose que

$$P = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r)(X - \alpha_{r+1})$$

est un polynôme annulateur de u . Un scalaire α_k est une valeur propre de u si, et seulement si, la projection p_k n'est pas identiquement nulle.

3. Suite de [128.4] – Un sous-espace F stable par u est aussi stable par les projections $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ et admet une décomposition en somme directe :

$$F = \bigoplus_{i=1}^r [F \cap \text{Ker } P_i(u)].$$

4. Si u admet un polynôme annulateur qui n'est pas irréductible, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs. Expliciter un polynôme annulateur pour chaque bloc diagonal.

5. Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, le degré de son polynôme minimal est égal au cardinal de son spectre.

6. Un endomorphisme u admettant $(X - \lambda)^m$ pour polynôme annulateur est diagonalisable si, et seulement si, c' est une homothétie.

7. Une matrice diagonale par blocs est diagonalisable si, et seulement si, chaque bloc diagonal est diagonalisable.

8.a Si le bloc A_1 n'est pas diagonalisable, alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

8.b Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. Le polynôme

$$X^2 - (\text{tr } A)X + (\det A)$$

est un polynôme annulateur de A . Comparer avec [136].

10. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la dimension de E est impaire, alors il existe au moins une droite stable par u .

11. Deux endomorphismes ayant un même polynôme minimal ont-ils même polynôme caractéristique ?

12. Deux endomorphismes ayant un même polynôme caractéristique ont-ils même polynôme minimal ?

13. L'encadrement [78.2] équivaut à l'inclusion

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad \text{Ker}(u - \lambda I_E) \subset \text{Ker}(u - \lambda I_E)^{m_\lambda}.$$

140. Soit $k \in \mathbb{C}$.

140.1 Le sous-espace propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre 0 est un plan.

140.2 Le polynôme minimal de A est égal à $X(X^2 - kX - 3)$. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $k \neq \pm 2i\sqrt{3}$.

141. Une matrice $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que

$$A^4 - 3A^3 + 2A^2 = 0$$

est diagonalisable. De plus, si $\text{tr}(A) = 8$, alors

$$\chi_A = (X - 1)^4(X - 2)^2.$$

142. Suite de [51.2] – Si P est le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable A , alors $P'(A)$ est inversible.

143. Suite de [14.2] – Quel est le polynôme minimal d'une matrice carrée de rang 1 ?

144. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Si une matrice $R \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, alors elle commute à A et il existe une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}RP$ soient diagonales.

Résoudre l'équation $R^2 = A$.

145. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf $a_{1,n} = 1$ et $a_{n,1} = -1$.

145.1 Le polynôme minimal de A est égal à $X(X^2 + 1)$, donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, mais pas dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

145.2 Comme $\text{Ker}(A^2 + I_n) = \text{Im } A$, alors $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

146. Existence de sous-espaces stables en dimension finie

Soit E , un espace de dimension finie sur le corps \mathbb{K} : tout endomorphisme u de E admet un polynôme minimal et son spectre est un ensemble fini.

146.1 * Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tout endomorphisme u de E , il existe au moins une droite vectorielle stable par u .

146.2 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme de degré 2 qui divise le polynôme minimal de u .

1. Il existe un vecteur x_0 non nul dans $\text{Ker } P_0(u)$.
2. Pour tout vecteur x_0 non nul de $\text{Ker } P_0(u)$, le plan

$$\text{Vect}(x_0, u(x_0))$$

est stable par u .

146.3 * Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tout endomorphisme u de E , il existe un sous-espace F stable par u tel que $1 \leq \dim F \leq 2$.

147. Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices triangulaires

On suppose que l'endomorphisme u de E est représenté dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ par une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. On pose $F_0 = \{0_E\}$ et

$$\forall 1 \leq k \leq d, \quad F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

1. Pour tout $1 < k \leq d$, l'image de F_k par $(u - \lambda_k I_E)$ est contenue dans F_{k-1} .
2. Le polynôme $(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_d)$ est un polynôme annulateur de u .
3. Peut-on déduire le théorème de Cayley-Hamilton de ce qui précède? →[208]

148. Caractérisation polynomiale des endomorphismes trigonalisables

On cherche une caractérisation plus souple que [109.2] des endomorphismes trigonalisables.

148.1 Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et μ_0 , le polynôme minimal de A .

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A , alors la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

où la sous-matrice $A_{n-1} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ admet μ_0 pour polynôme annulateur.

148.2 Soit $u \in L(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme u est trigonalisable.
2. Il existe un polynôme scindé annulateur de u .
3. Le polynôme minimal de u est scindé.
4. Le polynôme caractéristique de u est scindé.

149. Projecteurs spectraux

On considère un endomorphisme $u \in L(E)$, qu'on suppose diagonalisable. L'espace E est alors somme directe des sous-espaces propres :

$$(3) \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda I_E).$$

Les *projecteurs spectraux* de u sont les projections $(p_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(u)}$ associées à la décomposition de E en somme directe des sous-espaces propres. →[1.87]

149.1 On déduit de la décomposition (3) de E la décomposition suivante des vecteurs de x :

$$(4) \quad \forall x \in E, \quad x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} p_\lambda(x)$$

et comme cette décomposition est adaptée à u , on en déduit que

$$(5) \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} Q(\lambda)p_\lambda.$$

149.2 En particulier,

$$(6) \quad u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$$

et les projecteurs spectraux p_λ sont des polynômes en u .

149.3 Si u est inversible, alors

$$u^{-1} = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{-1} p_\lambda.$$

149.4 Pour tout $1 \leq i \leq r$, on note \mathcal{B}_i , une base du sous-espace propre $\text{Ker}(u - \lambda_i I_E)$. En concaténant ces bases, on obtient une base \mathcal{B}_0 de E , constituée de vecteurs propres de u , dans laquelle la matrice de la projection p_i est

$$\text{Diag}(0, \dots, 0, I_{d_i}, 0, \dots, 0)$$

où $d_i = \dim \text{Ker}(u - \lambda_i I_E)$.

149.5 La décomposition (6) de u se traduit matriciellement dans cette base \mathcal{B}_0 par :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k I_{d_k} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r I_{d_r} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & I_{d_k} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et dans une base quelconque \mathcal{B} par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot Q \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & I_{d_k} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

où Q est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_0 .

150. Suite de [142] – Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3n}(\mathbb{C}).$$

Alors

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 & AP'(A) \\ 0 & P(A) & 0 \\ 0 & 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

et B est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

151. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Les matrices

$$B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

sont semblables dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$. La matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable.

152.

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si M^2 est diagonalisable et inversible, alors M est diagonalisable.

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si $1 \notin \text{Sp}(A)$ et si $A^2 - 2A$ est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

153. Suite de [71] –

1. Tout polynôme annulateur de B est aussi un polynôme annulateur de A .

2. On suppose que le polynôme minimal P de A est scindé à racines simples.

$$P = \prod_{k=0}^r (X - \lambda_k)$$

2.a Si A est inversible, alors

$$Q = \prod_{k=0}^r (X^2 - \lambda_k^2)$$

est un polynôme annulateur de B .2.b Si $\lambda_0 = 0$, alors

$$Q = X \prod_{k=1}^r (X^2 - \lambda_k^2)$$

est un polynôme annulateur de B .

3. La matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable. Comparer avec [85].

VIII

Applications

VIII.1 Calcul du polynôme minimal

154. Cas d'une matrice diagonalisable

154.1 Si la matrice A est diagonale, son polynôme minimal est l'unique polynôme unitaire scindé à racines simples dont les racines sont les coefficients diagonaux de A .

154.2 Si la matrice A est diagonalisable :

$$A \equiv \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

alors son polynôme minimal est le polynôme unitaire, scindé, à racines simples dont les racines sont les valeurs propres de A :

$$\mu_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda).$$

155. Exemples

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables? Quels sont leurs polynômes minimaux?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

156. Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^T = A^2$. Quels sont les polynômes minimaux possibles pour A ? →[181]

VIII.2 Puissances d'une matrice

157. Calcul par réduction

On suppose que la matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ est diagonalisable. Il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D telles que $D = Q^{-1}AQ$.

157.1

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = QD^kQ^{-1}$$

157.2 Si le spectre de A est égal à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, alors il existe une famille $(P_k)_{1 \leq k \leq r}$ de matrices de projections telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \sum_{k=1}^r \lambda_k^n P_k.$$

Ces matrices P_k représentent les projecteurs spectraux de A .

158. Utilisation d'un polynôme annulateur

On suppose connu un polynôme annulateur P_0 de A (par exemple, le polynôme minimal).

158.1 On effectue la division euclidienne de X^k par P_0 :

$$X^k = Q_k P_0 + R_k$$

et on en déduit que $A^k = R_k(A)$.

158.2 Lorsque le polynôme P_0 est scindé à racines simples, on détermine le reste de la division euclidienne de X^k par P_0 en résolvant un système de Vandermonde.

158.3 La formule de Taylor donne le reste de la division euclidienne de X^k par $(X - \lambda)^d$.

159. Calcul de l'inverse

Soit A , une matrice inversible.

159.1 La matrice A admet un polynôme annulateur dont le terme constant n'est pas nul et son inverse peut être exprimé comme un polynôme en A . →[51.4]

159.2 Si A est diagonalisable, alors l'inverse de A est diagonalisable et peut être calculé par réduction comme au [157].

VIII.3 Résolution d'un système différentiel

160. Une fonction $X : I \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de classe \mathcal{C}^1 lorsque les composantes de la matrice colonne X sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans \mathbb{K} .

$$X(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \rangle$$

Dans ce cas, les composantes de la dérivée X' sont les dérivées des composantes de X .

$$X'(t) = \langle x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t) \rangle$$

161. Un système différentiel du premier ordre à coefficients constants est de la forme

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = AX(t)$$

où $X : I \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice (indépendante de t).

162. Réduction d'un système différentiel

Soient $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $\Delta = Q^{-1}AQ$ et $Y(t) = Q^{-1}X(t)$.

1. Si $X : I \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $Y : I \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = Q^{-1}X'(t).$$

2. La fonction X vérifie $X' = AX$ si, et seulement si, la fonction Y vérifie $Y' = \Delta Y$.

3. Si A est diagonalisable, il suffit de calculer une base de vecteurs propres de A pour résoudre le système $X' = AX$. Il faut calculer la base duale de cette base de vecteurs propres, c'est-à-dire inverser Q , pour tenir compte d'une condition initiale.

163. Suite de [96] – Résoudre les deux systèmes différentiels suivants.

$$\begin{cases} x' = 3x - y - z \\ y' = -x + 3y - z \\ z' = -x - y + 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

164. Suite de [116] – Les fonctions x, y et z vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 2z \\ y' = -8x + y + 6z \\ z' = -8x + 2y + 5z \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{3t} \\ (K_2 + K_3 t) e^{-t} \\ K_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

165. Comme les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables, une fonction $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x^{(3)}(t) - 5x''(t) + 7x'(t) - 3x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe trois réels A, B et C tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (A + Bt)e^t + Ce^{3t}.$$

166. Résoudre les systèmes différentiels suivants.

166.1

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

166.2

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t \\ y' = x + y + t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + y + t \end{cases}$$

VIII.4 Matrices compagnons

167. On appelle matrices compagnons* les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ & \ddots & & a_1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{p-2} \\ & & & & 0 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

168. Le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon est égal à son polynôme minimal :

$$X^p - (a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0).$$

169. Suites récurrentes linéaires

Une suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 2$

$$x_{n+p} = a_{p-1}x_{n+p-1} + \cdots + a_0x_n$$

peut être traduite en une suite géométrique vectorielle

$$X_{n+1} = AX_n$$

où $A^\top \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice compagnon.

Le calcul des puissances de A donne l'expression de x_n .

170. Équations différentielles linéaires d'ordre p

Une équation différentielle linéaire d'ordre $p \geq 2$ à coefficients constants

$$x^{(p)}(t) = a_{p-1}x^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t)$$

peut être traduite en un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = AX(t)$$

où $A^\top \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice compagnon.

171. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$? dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

172. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de matrice dont le polynôme minimal admet au moins une racine double.
2. Exemple de matrice admettant un polynôme minimal non scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Exemple de matrice inversible admettant un polynôme annulateur divisible par X .
4. Exemple de polynôme annulateur de u dont une racine n'est pas valeur propre de u .
5. Exemple d'endomorphisme n'admettant que 0 pour valeur propre sans être nilpotent.
6. Exemple d'endomorphisme admettant une infinité de valeurs propres. Un tel endomorphisme admet-il un polynôme minimal ?
7. Exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 n'ayant pas de valeur propre.
8. Exemple d'endomorphisme diagonalisable de $E = \mathbb{R}^n$ qui n'admet pas n valeurs propres deux à deux distinctes.
9. Suite de [133.3] – Exemple de sous-espaces F, G et H de E tels que $E = G \oplus H$ et que $F \neq (F \cap G) \oplus (F \cap H)$.
10. Exemple d'endomorphismes diagonalisables u et v qui n'ont aucun vecteur propre en commun.
11. Exemple de matrices de même spectre qui ne sont pas semblables.
 - 12.a Exemple d'endomorphismes ayant même polynôme minimal et des polynômes caractéristiques différents.
 - 12.b Exemple d'endomorphismes ayant même polynôme caractéristique et des polynômes minimaux différents.

173. Méthodes

1. Comment démontrer qu'une famille de vecteurs est une base?
2. On suppose connu le résultat de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^m$:

$$P = (X - \alpha)^m Q_m + R_m.$$

Comment en déduire le résultat de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^{m+1}$?

3. Comment démontrer que deux polynômes sont égaux?
4. Vaut-il mieux écrire un polynôme minimal sous forme développée ou sous forme factorisée?
5. La matrice d'un endomorphisme $u \in L(E)$ relative à une base \mathcal{B} étant connue, comment trouver les vecteurs de \mathcal{B} qui sont vecteurs propres de u ?
6. Comment démontrer qu'une matrice est diagonalisable?
7. Pourquoi calcule-t-on en général $\det(A - \lambda I_n)$ pour trouver le polynôme caractéristique de A ?
8. La connaissance du polynôme caractéristique (resp. du polynôme minimal) de u permet-elle de savoir si u est diagonalisable?

174. Questions pour réfléchir

- 1.a Les endomorphismes les plus simples sont les homothéties.
- 1.b Les endomorphismes les plus simples après les homothéties sont les projections.
2. Si A et A^{-1} sont semblables, la matrice A est-elle nécessairement une matrice de symétrie?
3. Suite de [17.7] – Réciproque?
- 4.a Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, alors \bar{X} est un vecteur propre de A associé à $\bar{\lambda}$. L'application $[X \mapsto \bar{X}]$ est-elle un isomorphisme de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ sur $\text{Ker}(A - \bar{\lambda} I_n)$?
- 4.b Soient E et F , deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. S'il existe une bijection φ de E sur F qui est *semi-linéaire* :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda x + y) = \bar{\lambda} \varphi(x) + \varphi(y)$$

alors E et F sont isomorphes.

5. Suite de [63] – Étudier la réciproque.
6. Comparer les supports de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et de σ^k pour $k \in \mathbb{N}$.
7. Une somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable?
8. S'il existe un polynôme P tel que $P(u)$ soit diagonalisable, l'endomorphisme u est-il diagonalisable?
9. Si le polynôme caractéristique de u est $(\lambda - X)^n$ et si u est diagonalisable, alors u est l'homothétie de rapport λ .
10. La connaissance des valeurs propres d'un endomorphisme permet-elle de savoir si cet endomorphisme est, ou non, diagonalisable?
11. Que dire des suites $(\text{Ker } u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ lorsque E est un espace de dimension finie? de dimension infinie?
- 12.a Toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins un vecteur propre. Comparer avec [172. 7].
- 12.b Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors elles admettent un vecteur propre commun.
13. Relier le polynôme minimal d'une matrice diagonale par blocs aux polynômes minimaux des blocs diagonaux.
14. Si A est une matrice à coefficients entiers et si le polynôme

$$P_0 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

est un polynôme annulateur de A , alors P_0 est le polynôme minimal de A .

15. Traduire par un système différentiel linéaire du premier ordre le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ magnétique B uniforme. La matrice de ce système est-elle diagonalisable?

16. Un système de deux masses égales reliées par des ressorts de mêmes caractéristiques peut être traduit par le système différentiel du second ordre $X''(t) = AX(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable? Comment résoudre un tel système? Interprétation physique des éléments propres de A ?

175. Soit E , un espace de dimension finie.
- 175.1 Si f et g sont deux endomorphismes tels que

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g,$$

alors ces deux sommes sont directes.

- 175.2 Si $(f + g) \in \text{GL}(E)$ et si $g \circ f = 0$, alors

$$\text{rg } f + \text{rg } g = \dim E \quad \text{et} \quad E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

- 175.3 Si f est un endomorphisme non nul tel que

$$\forall g \in L(E), \quad \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f \circ g),$$

alors f est un automorphisme de E .

- 175.4 Quels que soient les endomorphismes f et g ,

$$\text{rg}(f \circ g) \geq \text{rg } f + \text{rg } g - \dim E.$$

176. Soient $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\text{rg } A = \text{rg } B = 2$. Identifier la matrice BA .

177. Soient E , un espace vectoriel de dimension finie et u , un endomorphisme de E tel que

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u.$$

- 177.1 Il existe une base \mathcal{B} de E et une matrice inversible A telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

- 177.2 Il existe [51.4] un polynôme $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_1(A) = I.$$

- 177.3 La projection sur $\text{Ker } u$ parallèlement à $\text{Im } u$ est un polynôme en u .

178. Une matrice carrée est singulière (c'est-à-dire non inversible) si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente. →[118]

179. Soit E , un espace vectoriel réel. On suppose que u est un endomorphisme de E tel que $u^3 = I_E$.

1.

$$E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + I_E)$$

2. Existe-t-il une droite stable par u dans $\text{Ker}(u^2 + u + I_E)$? La dimension de ce noyau peut-elle être égale à 0? à 1?

3. En supposant que $\dim E = 2$, quels sont les polynômes minimaux possibles pour u ?

180. Matrice du produit vectoriel

Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, distinct de $(0, 0, 0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A sont égaux à $X(X^2 + a^2 + b^2 + c^2)$. La matrice A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, mais pas dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la matrice $B_\lambda = A + \lambda I_3$ est inversible et il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $B_\lambda^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$.

3. La relation $A^2 = U.U^T - U^T.UI_3$ redonne la formule du double produit vectoriel.

181. Suite de [156] – Si 0 est une valeur propre de A , alors le polynôme minimal de A est $X(X - 1)$ et A est semblable à $\text{Diag}(0, 1)$.

182. Suite de [70] – Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Décrire les sous-espaces propres de l'endomorphisme $v = [M \mapsto MA]$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en fonction des sous-espaces propres de la matrice A .

Approfondissement

183. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit P , un polynôme annulateur non nul de A . Expliciter un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tel que $Q(B) = 0$.

184. Localisation des valeurs propres [2.11]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \quad |\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Interprétation géométrique de cet encadrement.

185. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(0)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expliciter $M(a)^n$ pour $a \neq 0$.

186. Crochet de Lie

Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et φ , l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = MB - BM.$$

186.1 Reconnaître le sous-espace propre de φ associé à 0.

186.2 On suppose que $AB - BA = A$.

1. $\forall k \geq 1, \quad A^k B - BA^k = kA^k$.
2. Condition pour que A^k soit un vecteur propre de φ ?
3. La matrice A est nilpotente.
4. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(A).B - B.P(A) = A.P'(A).$$

En particulier, le polynôme minimal μ de A divise $X.\mu'$ et on retrouve ainsi qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu = X^p$.

186.3 Les vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres non nulles sont des matrices nilpotentes.

187. Soit E , un espace vectoriel complexe de dimension finie.

187.1 Si deux endomorphismes u et v commutent, alors ils ont un vecteur propre en commun.

187.2 S'il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha \cdot u,$$

alors u est nilpotent et les endomorphismes u et v ont un vecteur propre en commun.

187.3 S'il existe un scalaire $a \neq 0$ tel que

$$u \circ v - v \circ u = a \cdot u + b \cdot v,$$

alors

$$(a \cdot u + b \cdot v) \circ v - v \circ (a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot (a \cdot u + b \cdot v).$$

Par conséquent, si

$$u \circ v - v \circ u \in \text{Vect}(u, v),$$

alors il existe un vecteur propre commun à u et à v .

188.1 On considère la matrice diagonale par blocs

$$P = \text{Diag}(I_r, 0_{n-r})$$

et l'endomorphisme φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \frac{1}{2}(PM + MP).$$

En calculant $\varphi(M)$ avec

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D \in \mathfrak{M}_{n-r}(\mathbb{K}),$$

on peut démontrer que φ est diagonalisable.

188.2 Soit $p \in L(E)$, un projecteur. L'application φ définie par

$$\forall f \in L(E), \quad \varphi(f) = \frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)$$

admet

$$X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

pour polynôme annulateur. Elle est donc diagonalisable.

189. Soient a et b , deux réels non nuls tels que $|a| \neq |b|$. On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} B & \dots & B \\ \vdots & & \vdots \\ B & \dots & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $n \geq 2$.

1. Le rang de A est égal à 2.
2. La matrice A admet 0 pour valeur propre. Quelle est la dimension du sous-espace propre associé? En donner une base.
3. La matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1 est un vecteur propre de A . Quelle est la valeur propre associée à ce vecteur propre?
4. La matrice A est diagonalisable.

190. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $f \in L(E)$, un endomorphisme diagonalisable. Le *commutant* de f est l'ensemble C_f des endomorphismes de E qui commutent à f :

$$g \in C_f \iff g \circ f = f \circ g.$$

1. Caractériser l'ensemble des matrices M qui commutent à une matrice diagonale.

2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on note E_λ , le sous-espace propre $\text{Ker}(f - \lambda I_E)$ et d_λ , la dimension de ce sous-espace propre.

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- 2.a L'endomorphisme g commute à f .
- 2.b Chaque sous-espace propre de f est stable par g .
- 2.c Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, l'endomorphisme g commute au projecteur spectral p_λ de f .
- 2.d Il existe une famille $(g_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(f)}$ telle que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), \quad g_\lambda \in L(E_\lambda) \quad \text{et} \quad g = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} g_\lambda \circ p_\lambda.$$

3. La dimension du commutant de f est égale à

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} d_\lambda^2.$$

4. Comparer $\mathbb{K}[f]$ et le commutant de f .

191. Réduction simultanée

Soient u et v , deux endomorphismes de E , espace de dimension finie.

1. S'il existe une base \mathcal{B} de E dont les éléments sont à la fois des vecteurs propres pour u et des vecteurs propres pour v , alors les matrices $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et de $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(v)$ commutent.

2. On suppose que u et v sont diagonalisables et commutent.

2.a Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, le sous-espace $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I_E)$ est stable par v et l'endomorphisme v_λ induit par restriction de v à E_λ est diagonalisable.

2.b On pose $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où \mathcal{B} est une base adaptée à la décomposition

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda.$$

Il existe une matrice inversible et diagonale par blocs P telle que $P^{-1}BP$ soit diagonale. Que dire de la matrice $P^{-1}AP$?

3. Condition pour que deux endomorphismes admettent une base commune de vecteurs propres.

192. Condition sur $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

soit diagonalisable.

193. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

et on note $\rho(A)$, le rayon spectral de A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le rayon spectral $\rho(A^k)$ est égal à $[\rho(A)]^k$.

2. On note $\|\cdot\|$, la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Comme

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|A\| = \|A^T\|,$$

l'application $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral $\rho(A)$ est majoré par $\|A\|$.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

5. On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. La suite de matrices $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si, et seulement si, $\rho(A) < 1$.

194. Suite de [63] – Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe un polynôme P tel que $P(A)$ soit triangulaire avec des coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors A est diagonalisable.

195. Racine carrée d'une matrice positive

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice admettant n valeurs propres positives, deux à deux distinctes.

1. Suite de [63] – S'il existe une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, alors il existe une matrice inversible Q telle que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}MQ$ soient diagonales.

2. Il existe une, et une seule, matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres positives telle que $M^2 = A$.

196. Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \text{tr}(A^k) = 0.$$

1. Si P est le polynôme caractéristique de A , alors [136] la trace de $P(A)$ est nulle et la matrice A n'est pas inversible.

2. La matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix},$$

où $B \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si $B^{n-1} = 0$, alors $A^n = 0$.

3. Conclure.

197. Équation matricielle du second degré

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. Si $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie l'équation $M^2 + M = A$, alors [63] la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

3. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$.

198. Codiagonalisation

Des matrices $(A_i)_{i \in I}$ sont dites *codiagonalisables* lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que les matrices $P^{-1}A_iP$ soient diagonales pour tout $i \in I$.

198.1 Comme deux matrices diagonales quelconques commutent, si les matrices $(A_i)_{i \in I}$ sont codiagonalisables, alors elles commutent deux à deux.

198.2 On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la propriété suivante est vraie : pour tout espace vectoriel E de dimension inférieure à n , si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes de E qui sont tous diagonalisables et qui commutent deux à deux, alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_i)$ soit diagonale pour tout $i \in I$.

On considère alors un espace vectoriel E de dimension $(n+1)$ et une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E . On suppose que ces endomorphismes sont tous diagonalisables et qu'ils commutent deux à deux.

1. Si f_i est une homothétie pour tout $i \in I$, alors la matrice $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_i)$ est diagonale pour tout $i \in I$, quelle que soit la base \mathcal{B} de E .

2. Sinon, il existe une décomposition de E en somme directe

$$E = \bigoplus_{k=1}^r E_k$$

où chaque sous-espace E_k est stable par tous les endomorphismes f_i et

$$\forall 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq \dim E_k \leq n.$$

On en déduit qu'il existe au moins une base \mathcal{B} de E telle que toutes les matrices $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_i)$ soient diagonales.

199. Le couple (x, y) est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} x'' = 3x + y + e^{2t} \\ y'' = 2x + 2y + 3e^t \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe quatre réels C_1, C_2, C_3 et C_4 tels que

$$\begin{cases} x(t) = -(6t+1)e^t/12 + (12t-19)e^{2t}/72 \\ \quad \quad \quad + C_1e^t + C_2e^{-2t} + C_3e^{-t} + C_4e^{2t}, \\ y(t) = (6t-5)e^t/6 + (12t-43)e^{2t}/72 \\ \quad \quad \quad - 2C_1e^t + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t} + C_4e^{2t}. \end{cases}$$

200. Suite de [95] – La fonction $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X_t = \langle x_1(t), x_2(t), x_3(t) \rangle$$

est une solution du système différentiel $X'' = AX$ si, et seulement si, il existe six réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ et β_3 tels que

$$\begin{cases} x_1(t) = (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ch } t + (\beta_1 - \beta_2) \text{sh } t \\ x_2(t) = -\alpha_1 \text{ch } t - \beta_1 \text{sh } t - t/2(\beta_3 \text{ch } t + \alpha_3 \text{sh } t) \\ x_3(t) = (\alpha_3 - \alpha_2) \text{ch } t + (\beta_3 - \beta_2) \text{sh } t - t/2(\beta_3 \text{ch } t + \alpha_3 \text{sh } t). \end{cases}$$

Pour aller plus loin

201. Questions pour réfléchir

1. Suite de [2.11] – Proposer une localisation plus précise des valeurs propres de A .
2. Le polynôme minimal de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi le polynôme minimal de A considérée comme un élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Comment définir et caractériser les endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel de dimension infinie ?
4. On suppose que u est diagonalisable. Pour toute fonction f dont l'ensemble de définition contient le spectre de u , on peut poser

$$f(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} f(\lambda) p_\lambda \in \mathbb{K}[u].$$

Justifier cette définition en considérant les applications polynomiales. Considérer le cas $f = \exp$.

5. Exponentielle d'un projecteur ? Exponentielle d'une symétrie ?
6. On suppose que le polynôme minimal μ_0 de u est un polynôme de degré 2.
 - 6.a L'exponentielle de u est une combinaison linéaire de I_E et de u .
 - 6.b Expliciter $\exp(u)$ lorsque $\mu_0 = X^2 + 1$.

202. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note Γ , l'ensemble des endomorphismes u de E tels que

$$\text{Ker } u = F \quad \text{et} \quad \text{Im } u = G.$$

1. L'ensemble Γ est-il un sous-espace de $L(E)$?
2. Quelle est l'allure de la matrice de $u \in \Gamma$ dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$?
3. Pour tout $u \in \Gamma$, on note $\varphi(u)$, l'endomorphisme induit par restriction de u à G . L'application φ ainsi définie est une bijection de Γ sur $\text{GL}(G)$ et (Γ, \circ) est un groupe isomorphe à $(\text{GL}(G), \circ)$. Quel est l'élément neutre de ce groupe ?

203. Soit (G, \times) , un groupe dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Nature algébrique de l'élément neutre de ce groupe ?
2. Tous les éléments de G ont même rang.

204. On appelle *valeur spectrale* de u tout scalaire λ tel que $(u - \lambda I_E)$ ne soit pas inversible.

1. Toute valeur propre est une valeur spectrale. Réciproque en dimension finie ?
2. Exemple d'un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ ayant une valeur spectrale mais pas de valeur propre.
3. Si u admet un polynôme minimal, alors toute valeur spectrale est une valeur propre [44. 2] et le nombre de valeurs spectrales est fini.

205. Soient A et B , deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables en tant que matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \quad B = P^{-1}AP$$

et on pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_\theta = e^{i\theta}P + e^{-i\theta}\overline{P} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Il existe un nombre infini de $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $P_\theta \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et B sont semblables en tant que matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad B = Q^{-1}AQ.$$

206. Endomorphismes semi-simples

Un endomorphisme f de E est *semi-simple* lorsque tout sous-espace F de E stable par f admet un supplémentaire G stable par f .

1. On suppose que f est diagonalisable.
 - 1.a Un sous-espace de E , distinct de $\{0_E\}$, est stable par f si, et seulement si, il possède une base de vecteurs propres de f .
 - 1.b L'endomorphisme f est semi-simple.

2. On suppose que E est un espace vectoriel complexe et que f est semi-simple.

- 2.a Il existe (au moins) un sous-espace strict stable par f .
- 2.b L'endomorphisme f est diagonalisable.

3. Exemple d'endomorphisme semi-simple de \mathbb{R}^2 qui n'est pas diagonalisable.

207. Traduire le système différentiel

$$\begin{cases} x'' - 2y'' + y' + x - 3y = 0 \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

sous forme matricielle : $AX'' + BX' + CX = 0$ et déterminer une matrice-ligne L telle que $LA = 0$. Si $X = \langle x(t), y(t) \rangle$ est une solution du système initial, alors

$$-x'' + 2y'' - y' = 0.$$

Conclure.

208. Sous-espaces cycliques

On cherche ici à démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

208.1 Étude de l'orbite d'un vecteur

On considère un endomorphisme u de E , espace vectoriel de dimension quelconque.

L'*orbite d'un vecteur* $x \in E$ sous l'action d'un endomorphisme u est le sous-espace

$$F_x = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}).$$

1. L'orbite de x sous l'action de u est le plus petit sous-espace stable par u qui contient le vecteur x .

2. Si $\dim F_x$ est finie, alors il existe un, et un seul, entier $r_x \in \mathbb{N}$ tel que la famille

$$(u^k(x))_{0 \leq k \leq r_x}$$

soit une base de F_x .

3. Le degré du polynôme minimal de u est strictement supérieur à r_x .

4. Si le degré du polynôme minimal de u est égal à d , alors

$$\forall x \in E, \quad F_x = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)).$$

Étudier la réciproque.

208.2 Restriction à un sous-espace cyclique

On suppose que

$$\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^r(x))$$

est une base de F_x et on note u_x , l'endomorphisme de F_x induit par restriction de u .

1. Il existe une famille $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq r}$ de scalaires tels que

$$u^{r+1}(x) = \alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \dots + \alpha_r \cdot u^r(x).$$

Quelle est la matrice de u_x relative à \mathcal{B}_x ?

2. Le polynôme minimal de u_x est égal à

$$X^{r+1} - (\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_r X^r).$$

208.3 Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

On suppose que E est un espace de dimension finie et on choisit $x \in E$. On note u_x , l'endomorphisme induit par restriction de u au sous-espace $F_x = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.

1. Le polynôme caractéristique de u_x est un polynôme annulateur de u_x .

2. Le polynôme caractéristique de u_x divise le polynôme caractéristique χ_u de u .

3. $\forall x \in E, \quad \chi_u(u)(x) = 0_E$.