Réduction des endomorphismes [185.]

On note u, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de E.

Analyse.

Si les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables, alors $\operatorname{Sp} M(a) = \{2; 1\}$.

Polynôme caractéristique.

On vérifie sans peine que

$$\chi_a = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2),$$

quelle que soit la valeur de a. Cela confirme l'analyse précédente : les valeurs propres de $M(a)$ sont bien 1 et 2.

Étude des sous-espaces propres.

Il est clair que, indépendamment de la valeur de a, le rang de

$$M(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 (les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles ; les deux dernières colonnes sont égales) et que son noyau est la droite vectorielle dirigée par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il est aussi clair que, indépendamment de la valeur de a, le noyau de

$$M(a) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

contient la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cela dit, il faut discuter sur la valeur de a.

- Si $a = 0$, le rang de $M(a) - I_3$ est égal à 1, donc le sous-espace propre de $M(0)$ associé à la valeur propre 1 est un plan et la matrice $M(0)$ est diagonalisable, semblable à $\operatorname{Diag}(2, 1, 1)$.
- Si $a \neq 0$, le rang de $M(a) - I_3$ est égal à 2, donc le sous-espace propre de $M(a)$ associé à la valeur propre 1 est une droite. Mais 1 est une racine *double* du polynôme caractéristique, donc $M(a)$ n'est pas diagonalisable.

Cas diagonalisable ($a = 0$).

Si $a = 0$, le sous-espace propre de $M(0)$ associé à la valeur propre 0 est engendré par les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons les trois vecteurs de E définis par les relations suivantes.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après les calculs précédents, le vecteur ε_1 est un vecteur propre de u associé à 2 tandis que les vecteurs ε_2 et ε_3 sont des vecteurs propres de u associés à 1. Les deux colonnes n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ε_2 et ε_3 sont linéairement indépendants. Comme les sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, on en déduit que la famille $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est donc la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}_1$ et, d'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}M(0)P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u).$$

Par construction des vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3,

$$P^{-1}M(0)P = \operatorname{Diag}(2, 1, 1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} M(0)^n &= P\operatorname{Diag}(2^n, 1^n, 1^n)P^{-1} \\ &= 2^n \cdot \underbrace{P\operatorname{Diag}(1, 0, 0)P^{-1}}_{A_2} + \underbrace{P\operatorname{Diag}(0, 1, 1)P^{-1}}_{A_1} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Comment calculer les matrices A_1 et A_2 ? Un calcul matriciel (fastidieux, mais sans autre difficulté) donne bien sûr le résultat.

Il est plus intéressant d'appliquer le Théorème de décomposition des noyaux. Comme $M(0)$ est diagonalisable,

$$E = \operatorname{Ker}(u - 2I) \oplus \operatorname{Ker}(u - I)$$

et les projections associées à cette décomposition en somme directe se déduisent directement de la relation de Bézout : comme

$$(X - 1) + (2 - X) = 1$$

alors la projection sur le sous-espace propre associé à 2 est égale à $u - I$ et la projection sur le sous-espace propre associé à 1 est égale à $2I - u$.

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u^n = 2^n \cdot (u - I) + 1^n \cdot (2I - u)$$

ou, matriciellement dans la base canonique,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M(0)^n = 2^n \cdot \underbrace{[M(0) - I_3]}_{A_2} + \underbrace{[2I_3 - M(0)]}_{A_1}.$$

Cas non diagonalisable ($a \neq 0$).

Le Théorème de Cayley-Hamilton nous dit que le polynôme caractéristique $(X - 1)^2(X - 2)$ est un polynôme annulateur de u. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \operatorname{Ker}(u - 2I) \oplus \operatorname{Ker}(u - I)^2$$

et, ici encore, les projections associées à cette décomposition en somme directe se déduisent facilement de la relation de Bézout. Comme

$$1 \cdot (X - 1)^2 - X \cdot (X - 2) = (X - 1)^2 + X(X - 2) = 1,$$

la projection sur le sous-espace propre associé à 2 est égale à $(u - I)^2$ et la projection sur le sous-espace caractéristique associé à 1 est égale à $u \circ (2I - u) = 2u - u^2$, mais aussi à $I - (u - I)^2$.

❧ On vérifie sans peine

$$[M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

On considère cette fois les vecteurs de E définis par les relations suivantes.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette fois encore, les vecteurs ε_1 et ε_2 sont des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres 2 et 1. Quant à ε_3, c'est maintenant un vecteur de $\mathrm{Ker}(u - I)^2$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(u - I)$. Par conséquent, les vecteurs ε_2 et ε_3 sont linéairement indépendants (l'un est un vecteur propre, mais pas l'autre). D'après le Théorème de décomposition des noyaux, les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u-2I)$ et $\mathrm{Ker}(u-I)^2$ sont en somme directe, donc la famille $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, c'est encore une base de E.

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

en tant que matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}_1$, est donc inversible.

On constate alors que

$$[M(a) - I_3] \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la représentation matricielle relative à la base canonique de la relation vectorielle suivante.

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + a \cdot \varepsilon_2.$$

Par conséquent,

$$P^{-1}M(a)P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ On vérifie sans peine que les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutent et que $N^2 = 0_3$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} P^{-1}M(a)^n P = P^{-1}[D + aN]^n P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot D^{n-k}N^k \\ &= D^n + na \cdot N \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} M(a)^n = 2^n \cdot P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &+ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &+ na \cdot P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

❧ Cette fois encore, on peut calculer ces trois matrices comme un bourrin (*by brute force* comme ils disent). Mais cette fois encore, il y a mieux à faire.

En effet, d'après la formule de changement de base, les matrices

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{et} \quad P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

représentent dans la base canonique la projection sur la droite $\mathbb{R}\cdot\varepsilon_1$ parallèlement au plan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et la projection sur le plan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}\cdot\varepsilon_1$. Mais c'est... bien sûr ! Ce sont les projections associées à la décomposition en somme directe

$$E = \mathrm{Ker}(u-2I)\oplus\mathrm{Ker}(u-I)$$

et nous avons déjà identifié ces deux projections !

Ainsi,

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} = [M(a)-I_3]^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-a&-a-1\\1&a&a+1\end{pmatrix}$$
$$P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1} = I_3-[M(a)-I_3]^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1+a&1+a\\-1&-a&-a\end{pmatrix}$$

et avec la décomposition de $M(a)^n$ pour $n=1$, on trouve facilement la dernière matrice :

$$P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Bref, pour tout $n\geqslant 1$,

$$M(a)^n = 2^n\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-a&-a-1\\1&a&a+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1+a&1+a\\-1&-a&-a\end{pmatrix} + na\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

et on constate que la formule établie pour $a\neq 0$ est encore valable pour $a=0$.