*Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n - x - n \quad \text{et} \quad P_n(x) = x^2 + (n-1)x - (n+1).$$

**1❧** *Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n$ positif tel que*

$$f_n(u_n) = 0.$$

*Vérifier que $1 < u_n < 2$.*

**2❧** *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 1, puis que*

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell n\, n}{n}.$$

**3❧** *Démontrer que*

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 1 + \frac{1}{n} < u_n < 2$$

*puis que $P_n(u_n) > 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.*

**1❧** Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 1.$$

Par conséquent, la fonction $f_n$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_n]$ et strictement croissante sur $[\alpha_n, +\infty[$ avec

$$\alpha_n = n^{-1/(n-1)}\,]0, 1[.$$

Comme $f_n(0) = -n < 0$ et que $f_n$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

— sur $[0, \alpha_n]$, la fonction $f_n$ est strictement négative ;

— la fonction $f_n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha_n, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[\alpha_n, +\infty[$ sur $[f_n(\alpha_n), +\infty[$.

Comme $f_n(\alpha_n) < 0$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une, et une seule, solution sur $\mathbb{R}_+$.

✍ *On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est* définie implicitement *parce qu'on ne connaît pas de "formule" pour calculer $u_n$ : on ne peut calculer $u_n$ ni directement à partir de $n$, ni progressivement à partir de $u_2$ et d'une relation de récurrence. Pour chaque valeur de $n$, il faut <u>résoudre</u> une équation.*

❧ Comme $f_n(1) = -n < 0$ et que $f_n(2) = 2^n - n - 1 > 0$ (pour tout $n \geqslant 2$, à vérifier par récurrence), le Théorème des valeurs intermédiaires nous assure que le réel $u_n$ est strictement encadré par $1$ et $2$.

✍ *La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est donc bornée, mais l'étude de sa monotonie est assez difficile. Heureusement, on va pouvoir conclure sans utiliser le Théorème de convergence monotone.*

**2❧** Par définition de $u_n$,

$$u_n^n = u_n + n > 0.$$

On en déduit que

$$n\, \ell n\, u_n = \ell n(u_n + n) = \ell n\left[n\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)\right] = \ell n\, n + \ell n\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)$$

et donc que

$$\ell n\, u_n = \frac{\ell n\, n}{n} + \frac{1}{n}\,\ell n\left(1 + \frac{u_n}{n}\right). \tag{$\clubsuit$}$$

On a démontré que la suite $u$ était bornée. Par conséquent, le quotient $u_n/n$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$ et par composition de limites, le second membre tend vers $0$.

$$\underbrace{\frac{\ell n\, n}{n}}_{\to 0} \qquad \underbrace{\ell n\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)}_{\to 0}$$

En composant par exp (qui est continue), on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $e^0 = 1$.

❧ On peut alors en déduire que

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\cdot\frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

et de la relation (♣) que

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

on en déduit enfin que

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Or, on sait que

$$\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$$

pour toute suite $\varepsilon$ de limite nulle et comme $u$ tend vers $1$, la suite de terme général $\varepsilon_n = u_n - 1$ est bien une suite de limite nulle. Donc

$$u_n - 1 = \varepsilon_n \sim \ln(1+\varepsilon_n) = \ln u_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

✍ *Attention, la suite de l'exercice est vraiment compliquée !*

3❧ Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right) - n.$$

Par concavité du logarithme,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant 1+x$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \leqslant \exp(1),$$

donc

$$f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant e - \frac{1}{n} - (n+1) < 0$$

pour tout entier $n$ supérieur à $2$.

D'après les variations de $f_n$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 1+\frac{1}{n} < u_n < 2.$$

❧ La fonction $P_n$ est un trinôme du second degré, donc elle atteint son minimum en $x = -(n-1)/2 < 0$. Elle est en particulier croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $1 + 1/n < u_n$, on en déduit que $P_n(u_n) > P_n(1 + 1/n)$ et comme

$$P_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0,$$

on a bien $P_n(u_n) > 0$.

❧ Sachant que $u_n^n = u_n + n$ (par définition de $u_n$),

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^{n+1} - u_n - (n+1) \\ &= u_n \cdot u_n^n - u_n - (n+1) \\ &= u_n(u_n+n) - u_n - (n+1) \\ &= P_n(u_n) > 0. \end{aligned}$$

Par définition de $u_{n+1}$, on a

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(u_n).$$

Or $u_n$ et $u_{n+1}$ sont supérieurs à $1$ et $f_{n+1}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ (cf étude des variations à la première question), donc

$$u_{n+1} < u_n$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.