RMS 2023 [ENS]

> *On note* E*, l'ensemble des fonctions* f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*
>
> $$f(0) = 0 \quad et \quad f(1) = 1.$$
>
> *Existence et calcul de*
>
> $$\inf_{f \in E} J(f)$$
>
> *où*
>
> $$J(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\, dt.$$

❧ Comme $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on intègre ici une fonction continue sur un segment, donc l'intégrale est bien définie et positive.

L'ensemble E contient évidemment la fonction $f_0 = [t \mapsto t]$, donc la borne inférieure de J est bien définie (borne inférieure d'une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$).

✍ *Considérons le graphe de* $f \in E$ *comme un arc paramétré par*

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \gamma(t) = \big(t, f(t)\big).$$

La fonction intégrande est la norme (euclidienne canonique) du vecteur vitesse

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big).$$

Intégrer la norme du vecteur vitesse consiste à calculer la distance parcourue en partant du point $(0,0)$ *(à* $t = 0$*) et en arrivant au point* $(1,1)$ *(à* $t = 1$*). Il ne fait donc pas de doute que la borne inférieure de* J *soit atteinte pour un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire pour* $f = f_0$*.*

❧ Reformulons ce problème d'optimisation sous forme variationnelle : pour $f \in E$, on pose

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad G(t) = f(t) - f_0(t) \quad \text{et} \quad g(t) = G'(t) = f'(t) - 1.$$

Nous cherchons donc à minimiser l'expression

$$L(g) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[1 + g(t)\right]^2}\, dt$$

sur le sous-espace H des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 g(t)\, dt = 0.$$

Il est clair que

$$L(g) = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + g(t) + \frac{g^2(t)}{2}}\, dt.$$

❧ La fonction ψ définie par

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \psi(u) = \sqrt{1 + u + \frac{u^2}{2}}$$

est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (le trinôme est irréductible) et

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \psi'(u) = \frac{1+u}{2\psi(u)}$$
$$\psi''(u) = \frac{1}{4\psi^3(u)}.$$

La fonction ψ est donc convexe et en particulier,

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \psi(u) \geqslant \psi(0) + u\psi'(0) = 1 + \frac{h}{2}.$$

Par conséquent, quelle que soit la fonction $g \in H$,

$$L(g) = \sqrt{2}\int_0^1 \psi\big(g(t)\big)\,dt \geqslant \sqrt{2}\int_0^1 1 + \frac{g(t)}{2}\,dt = \sqrt{2}.$$

On en déduit que

$$\forall\, f \in E, \qquad J(f) \geqslant \sqrt{2} = J(f_0)$$

et notre intuition est confirmée.

✍ *La page* Calcul des variations *de Wikipedia nous apprend que nous venons de résoudre un* ***problème de Lagrange*** *: nous avons trouvé, parmi les fonctions* $[t \mapsto x(t)]$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *qui vérifient les conditions aux limites*

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f,$$

celle qui rend minimale la fonctionnelle J *définie par*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \mathscr{L}\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt$$

où $\mathscr{L} = [(t, x, u) \mapsto \mathscr{L}(t, x, u)]$*, le* ***lagrangien****, est une fonction "régulière" des trois variables* t*,* x *et* u*.*