✍ *Nous allons, comme d'habitude, identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et ceux de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: on ne fera donc pas de distinction entre*

$$(x, y, z) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Cependant, on distinguera soigneusement la matrice $M(a)$ et l'endomorphisme f_a représenté par la matrice $M(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, alors la matrice $P^{-1}M(a)P$ (qui est une matrice semblable à $M(a)$) représente f_a dans la base $\mathscr{B}$.

❧ Un calcul direct montre que le polynôme caractéristique de $M(a)$ est égal à $(X-2)(X-1)^2$.

✍ *Si l'on en croit l'énoncé, les valeurs propres de $M(a)$ sont 1 et 2. Cela simplifie la factorisation du polynôme caractéristique !*

❧ D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de $M(a)$. Les facteurs $(X-2)$ et $(X-1)^2$ sont premiers entre eux, donc les sous-espaces caractéristiques

$$V_2 = \operatorname{Ker}(f_a - 2I_3) \quad \text{et} \quad V_1 = \operatorname{Ker}(f_a - I_3)^2$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et stables par f_a. De plus, on sait que la dimension d'un sous-espace caractéristique est égal à la multiplicité de la valeur propre, donc

$$\dim V_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \dim V_1 = 2.$$

✍ *Concrètement, cela signifie qu'un vecteur non nul de V_2 est un vecteur directeur de cette droite (il s'agit d'un vecteur propre de f_a associé à la valeur propre 2, car V_2 est en fait un sous-espace propre de f_a) ; que deux vecteurs non proportionnels de V_1 forment une base de ce plan et que la famille constituée de ces trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f_a est diagonale par blocs.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

► Le rang de la matrice

$$M(a) - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et le sous-espace propre V_2 est la droite dirigée par $\varepsilon_1 = (0, 1, -1)$.

► Par ailleurs,

$$M(a) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $[M(a) - I_3]^2$ est toujours égal à 1 (le sous-espace caractéristique est un plan, quel que soit a) ; celui de la matrice $[M(a) - I_3]$ est égal à 2 (pour $a \neq 0$) ou à 1 (pour $a = 0$ seulement).

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé et si les sous-espaces propres sont égaux aux sous-espaces caractéristiques. Donc la matrice $M(a)$ est donc diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

❧ Quoiqu'il en soit, nous cherchons une base du sous-espace caractéristique V_1, représenté par l'équation cartésienne $[x + ay + (a+1)z = 0]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour $a \neq 0$, le sous-espace $\operatorname{Ker}(f_a - I_3)$ est la droite dirigée par $(1, 1, -1)$ et d'après le cours, il s'agit de chercher un vecteur $\varepsilon_3 \in V_1$ qui n'appartient pas au sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f_a - I_3)$. Le plus simple est donc de choisir $\varepsilon_3 = (a, -1, 0)$ et comme

$$[M(a) - I_3]\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on est conduit à poser $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$.

On a ainsi défini une famille de trois vecteurs : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dont le premier est un vecteur directeur de V_2 et où le couple $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de V_1. Comme les sous-espaces V_1 et V_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, cette famille est une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

De plus,

$$f_a(\varepsilon_1) = 2 \cdot \varepsilon_1, \quad f_a(\varepsilon_2) = 1 \cdot \varepsilon_2, \quad f_a(\varepsilon_3) = 1 \cdot \varepsilon_3 + a \cdot \varepsilon_2$$

donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f_a) = P^{-1}M(a)P \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ On en déduit que

$$P^{-1}M(a)P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

où les matrices D (diagonale) et N (nilpotente d'indice 2) commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$P^{-1}M(a)^nP = D^n + \binom{n}{1} aD^{n-1}N$$

avant de revenir dans la base canonique :

$$M(a)^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} + na\,\underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{N_0}.$$

✍ *On peut en déduire $M(a)^n$ par calcul matriciel. Mais ça manque franchement d'élégance...*

❧ Un *vrai géomètre* doit remarquer que

$$\Pi_2 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_1 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

représentent, dans la base canonique, les projections associées à la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = V_2 \oplus V_1$. En particulier, $\Pi_1 = I_3 - \Pi_2$ et on a démontré plus haut que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n \cdot \Pi_2 + 1^n \cdot (I_3 - \Pi_2) + naN_0.$$

Avec $n = 1$ et $n = 2$, on obtient deux équations qui permettent d'en déduire que

$$\Pi_2 = [M(a) - I_3]^2 \quad \text{et que} \quad -aN_0 = [M(a) - I_3][M(a) - 2I_3].$$

❧ Un *véritable arithméticien* (qui connaît les détails de la démonstration du Théorème de décomposition des noyaux) sait que les projections Π_1 et Π_2 sont des polynômes en $M(a)$ et que la résolution de l'équation de Bézout permet de calculer ces polynômes.

Le polynôme $(X-2)(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $M(a)$ écrit comme un produit de facteurs deux à deux premiers entre eux : $P_2 = (X-2)$ et $P_1 = (X-1)^2$. Par conséquent, les polynômes $Q_2 = (X-1)^2$ et $Q_1 = (X-2)$ sont premiers entre eux et l'algorithme habituel nous donne

$$Q_2 - XQ_1 = 1.$$

Les projections associées à la décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}[M(a) - 2I_3] \oplus \operatorname{Ker}[M(a) - I_3]^2$$

sont donc

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= Q_2[M(a)] = [M(a) - I_3]^2 \\ \text{et} \quad \Pi_1 &= -M(a)Q_1[M(a)] = -M(a)[M(a) - 2I_3]. \end{aligned}$$

La décomposition

$$M(a) = 2 \cdot \Pi_2 + 1 \cdot \Pi_1 + a \cdot N_0$$

nous redonne alors la matrice N_0.

❧ On peut donc arriver à calculer

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = 2^n\Pi_2 + \Pi_1 + naN_0$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= [M(a) - I_3]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a & -a-1 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 &= I_3 - \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \\ -1 & -a & -a \end{pmatrix} \\ aN_0 &= -[M(a) - I_3][M(a) - 2I_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant très, très peu de calculs matriciels (et sans inverser la matrice P).

✍ *Il est tentant de partir de la décomposition*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais comme les deux termes de cette décomposition ne commutent pas, elle n'est d'aucun intérêt pratique !