✍ *Il s'agit de démontrer que*

$$\forall\, t \in\,]-r, r[\,, \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k$$

et l'inégalité de Taylor-Lagrange rappelée en ***[52.1]*** *est l'outil idéal pour atteindre cet objectif.*

Fixons $0 < \rho < r$. Par hypothèse, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{|u| \leqslant \rho} \left| f^{(n+1)}(u) \right| \leqslant \frac{M(n+1)!}{r^{n+1}}.$$

On déduit alors de l'inégalité de Taylor-Lagrange que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in [-\rho, \rho], \qquad \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| &\leqslant \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M \cdot \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \\ &\leqslant M \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \rho/r < 1$, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui démontre que

$$\forall\, t \in [-\rho, \rho], \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k$$

et comme cette propriété est obtenue pour tout $0 < \rho < r$, on a bien démontré que

$$\forall\, t \in\,]-r, r[\,, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k.$$

✍ *Sur le segment $[-\rho, \rho]$, on a trouvé un majorant indépendant de t. On a donc démontré que la série de Taylor convergeait* uniformément sur tout segment $[-\rho, \rho]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-r, r[$. *(Ce n'est pas une surprise, il en va ainsi pour* toutes *les séries entières !)*

Attention, a priori, la convergence n'est pas uniforme *sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$. Les calculs qui précèdent ne donnent en effet qu'une majoration inutile :*

$$\forall\, t \in\,]-r, r[\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leqslant M.$$