Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2022/2023 **MP**

Composition de Mathématiques

Le 30 novembre 2022 – De 13 heures à 16 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Nous allons étudier la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

La somme de cette série sera notée U :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}.$$

Dans un premier temps, on vérifiera que U est bien définie sur $\mathbb{R}$. On démontrera ensuite qu'elle est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$ et, pour finir, qu'elle n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0, 2\pi]$.

Partie A. Applications de la transformation d'Abel

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \textit{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

1. En remarquant que $b_k = B_k - B_{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$, démontrer que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \qquad (\star)$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

*L'égalité $(\star)$ est appelée **transformation d'Abel** (du nom du génial mathématicien norvégien, mort de la tuberculose en 1829, âgé de 26 ans).*

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

2. a. Démontrer que la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge.

2. b. En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.

2. c. Relier ce résultat au Critère spécial des séries alternées (dont on donnera un énoncé).

3. Dans cette question, le réel θ appartient à

$$\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}^c$$

et α est un réel fixé.

3. a. Calculer une expression simplifiée de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}.$$

3. b. Discuter la nature de la série

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

en fonction du réel α.

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ (définie en préambule) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

☞ *On rappelle qu'une série complexe $\sum v_n$ converge si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum \mathfrak{Re}(v_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(v_n)$ convergent.*

Partie B. Convergence uniforme

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur une partie A de $\mathbb{C}$, à valeurs complexes.

Pour tout $z \in A$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z).$$

*On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 ; on suppose d'autre part que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **uniformément bornée** : il existe un réel M tel que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in A, \quad \left|F_n(z)\right| \leqslant M.$$

5. Démontrer que la suite de fonctions $(a_n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A (en précisant la limite de cette suite), puis que la série de fonctions

$$\sum (a_k - a_{k+1}) F_k$$

converge normalement sur A.

6. À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions

$$\sum a_n f_n$$

converge uniformément sur A.

Partie C. Étude d'une série

On étudie ici les propriétés de la fonction U, somme de la série de fonctions définie plus haut.

7. Démontrer que la fonction U est périodique, de période 2π, et impaire.

8. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 1 - e^{ix} = -2i \sin\frac{x}{2}\, e^{ix/2}.$$

8. b. Soit $0 < a < \pi$. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $V_a = [a, 2\pi - a]$.

8. c. Démontrer que la fonction U est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 2\pi[$.

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction v_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad v_n(x) = \frac{\sin nx \sin px}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$.

☞ *On pourra utiliser, sans la démontrer, l'inégalité suivante.*

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \frac{x}{\pi} \leqslant \sin\frac{x}{2}.$$

Si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période 2π, ses ***coefficients de Fourier*** *sont définis par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

et par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt.$$

Pour une telle fonction, le ***Théorème de Parseval*** *nous indique que*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big|^2\, dt = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2(f).$$

10. On suppose que la fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

10. a. Démontrer que $a_n(U) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(U) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt.$$

10. b. Expliciter les coefficients $b_n(U)$.

☞ *On pourra utiliser, sans les justifier, les relations suivantes.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 nt\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall\, p \neq n, \quad \int_0^{\pi} \sin nt \sin pt\, dt = 0$$

10. c. En déduire que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

❖ II – Problème ❖

On note $\mathcal{D}$, l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers strictement négatifs :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*.$$

On étudie dans ce problème la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-n\}, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$.

On note U, la somme de cette série de fonctions :

$$\forall\, x \in \mathcal{D}, \quad U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

U_n, sa n-ième somme partielle et R_n, son reste d'ordre n :

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad et \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathcal{D}, \quad R_n(x) = U(x) - U_n(x).$$

Partie A. Régularité et ordre de grandeur de U

2. a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer l'expression de $u_n^{(p)}(x)$, dérivée p-ième de $u_n(x)$.

2. b. Soient $-1 < a < b$. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

2. c. En déduire que U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

3. a. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $U(x)$ en fonction de $U_N(x)$ et de $U(x+N)$.

3. b. En déduire que la fonction U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-(N+1), -N[$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

4. Soit $p \geqslant 2$, un entier. Établir une expression de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$$

en fonction de p et de $U^{(p-2)}(x)$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $-N$.

6. a. Démontrer que U est strictement décroissante sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$.

6. b. Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad \int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

En déduire un équivalent de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathcal{D}, \quad 4U(x) = U\Big(\frac{x}{2}\Big) + U\Big(\frac{x-1}{2}\Big).$$

Partie B. Expression intégrale de U

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, *on considère la fonction*

$$f_p : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^*, \quad f_p(t) = \frac{t^{p+1}}{e^t - 1}.$$

8. Déterminer l'unique prolongement continu sur $\mathbb{R}$ de f_p. Ce prolongement sera encore noté f_p.

9. Donner un équivalent simple de $f_p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

10. On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-xt}\,dt.$$

Démontrer que φ est définie sur $]-1, +\infty[$, et seulement sur cet intervalle.

11. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a > -1$.

11. a. Vérifier que

$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f_p(t)e^{-xt} \leqslant f_p(t)e^{-at}.$$

11. b. Démontrer que la fonction $\left[t \mapsto f_p(t)e^{-at}\right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

12. Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

13. Calculer la limite de φ au voisinage de $+\infty$.

14. a. Démontrer que

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

14. b. En déduire que

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) = U(x).$$

15. Soit $p \geqslant 2$, un entier. Pour tout $x > -1$, exprimer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p}$$

à l'aide de p et de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t - 1}\,dt.$$

Solution I ❀ Convergence uniforme d'une série trigonométrique

Partie A. Applications de la transformation d'Abel

1. Tout d'abord, $b_0 = B_0$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$B_k - B_{k-1} = \sum_{j=0}^{k} b_j - \sum_{j=0}^{k-1} b_j = b_k.$$

On en déduit le calcul suivant, très classique :

$$\begin{aligned} S_n &= a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \\ &= a_0B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\ &= \left(a_0B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_kB_k\right) - \sum_{k=1}^{n} a_kB_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_kB_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}B_k \qquad (\dagger) \\ &= a_nB_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k \end{aligned}$$

où on a effectué (†) le changement d'indice $k \leftarrow k+1$ dans la seconde somme.

2. a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit que les sommes partielles de la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ tendent vers a_0 et donc que cette série converge. En outre,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_0.$$

2. b. Par définition, la série $\sum a_nb_n$ converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge.

❧ Tout d'abord, la suite $(a_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en tant que produit d'une suite de limite nulle (les a_n) et d'une suite bornée (les B_n).

❧ On considère ensuite la série $\sum(a_k - a_{k+1})B_k$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|(a_k - a_{k+1})B_k\right| \leqslant (a_k - a_{k+1})\, \|B\|_\infty$$

et on sait **[2.a.]** que la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge.

On déduit alors du Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la <u>série</u>

$$\sum(a_k - a_{k+1})B_k$$

est (absolument) convergente. Par conséquent, la <u>suite</u> des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est convergente.

❧ En tant que somme de deux suites convergentes, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, cqfd.

2. c. Le Critère spécial des séries alternées nous dit que : si la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.

❧ En prenant $b_n = (-1)^n$, on a

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} \in \{0; 1\}.$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et comme les hypothèses de travail sont satisfaites, on peut déduire de **[2.b.]** que la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.

❧ Autrement dit : nous avons démontré au **[2.b.]** une généralisation du Critère spécial des séries alternées.

3. a. On reconnaît une somme géométrique de raison

$$e^{i\theta} \neq 1$$

puisque $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \cdot \frac{1 - (e^{i\theta})^n}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \cdot \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

REMARQUE.— Lorsque n varie, *le réel θ étant fixé,* seul le facteur $(1 - e^{in\theta})$ varie et, par inégalité triangulaire, il reste borné (son module est majoré par 2).

3. b. Soit $\alpha > 0$. Il est clair que la suite réelle de terme général

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

est décroissante et tend vers 0. Par ailleurs, d'après la question précédente, les sommes partielles B_n de la série complexe

$$\sum b_n = \sum (e^{i\theta})^n$$

sont bornées (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$). On peut donc déduire de **[2.b.]** que la série $\sum a_nb_n$ est convergente.

❧ Considérons maintenant le cas $\alpha \leqslant 0$. Dans ce cas, la série $\sum a_nb_n$ est grossièrement divergente puisque

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geqslant 1.$$

❧ Conclusion : pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\alpha = 1/2 > 0$, on déduit de la question précédente que la série

$$\sum \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$$

est convergente. Par conséquent, la série de terme général

$$u_n(x) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{e^{inx}}{n^{1/2}}\Big)$$

est convergente.

❧ Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, tous les $u_n(x)$ sont nuls, donc la série $\sum u_n(x)$ converge aussi.

❧ Finalement, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Partie B. Convergence uniforme

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in A$,

$$\big|a_n F_n(z) - 0\big| = |a_n|\,\big|F_n(z)\big| \leqslant M|a_n|.$$

On a obtenu un majorant indépendant de $z \in A$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce majorant tend vers 0. On a ainsi prouvé que la suite de fonctions $(a_n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur A vers la fonction nulle.

❧ Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad a_k - a_{k+1} \geqslant 0.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in A$,

$$\begin{aligned}\big|(a_k - a_{k+1})F_k(z)\big| &= (a_k - a_{k+1})\big|F_k(z)\big| \\ &\leqslant M\,(a_k - a_{k+1}).\end{aligned}$$

On a obtenu un majorant indépendant de $z \in A$ et, d'après **[2.a.]**, le majorant est le terme général d'une série convergente. On a donc démontré que la série de fonctions $\sum(a_k - a_{k+1})F_k$ convergeait normalement sur A.

6. Soit $z \in A$. D'après la transformation d'Abel ($\star$), pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f_k(z) = a_n F_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})F_k(z).$$

On a démontré à la question précédente que la suite de fonctions $(a_n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur A vers la fonction nulle et que la série numérique

$$\sum \|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty$$

était convergente.

❧ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in A$. Comme la convergence uniforme et la convergence normale impliquent la convergence simple, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f_k(z) = 0 + \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k - a_{k+1})F_k(z)$$

et donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}R_n(z) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k f_k(z) \\ &= -a_n F_n(z) + \sum_{k=n}^{+\infty}(a_k - a_{k+1})F_k(z)\end{aligned}$$

(différence entre la somme et les sommes partielles). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k f_k(z)\Big| &\leqslant \big|a_n F_n(z)\big| + \sum_{k=n}^{+\infty}\big|(a_k - a_{k+1})F_k(z)\big| \\ &\leqslant \|a_n F_n\|_\infty + \sum_{k=n}^{+\infty}\|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty\end{aligned}$$

(puisque la borne supérieure est un majorant).

❧ Ayant trouvé un majorant indépendant de $z \in A$, on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|R_n\|_\infty \leqslant \|a_n F_n\|_\infty + \sum_{k=n}^{+\infty}\|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty.$$

Or on a démontré que

$$\lim_{n\to+\infty}\|a_n F_n\|_\infty = 0$$

(convergence uniforme vers la fonction nulle) et que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty = 0$$

(par convergence normale, le reste de la série des normes tend vers 0). On déduit du Théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty = 0$$

et donc que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

Partie C. Étude d'une série

7. Toutes les fonctions u_n sont impaires et périodiques, de période 2π :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned}u_n(-x) &= -u_n(x) \\ u_n(x + 2\pi) &= u_n(x).\end{aligned}$$

Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ **[4.]**, on en déduit que sa somme S est aussi impaire et périodique, de période 2π, en sommant les égalités précédentes pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned}U(-x) &= -U(x) \\ U(x + 2\pi) &= U(x)\end{aligned}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère ici que $a_0 f_0(x) = 0$ (puisque les fonctions u_n commencent avec $n = 1$) et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = a_n f_n(x)$$

avec $a_n = {}^1\!/\!\sqrt{n}$ et $f_n(x) = \sin nx$.

8. a. On factorise par l'angle moitié.

$$1 - e^{ix} = -e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = -2i\sin\frac{x}{2}\,e^{ix/2}.$$

8. b. On a observé **[3.b.]** que la suite de terme général $a_n = {}^1\!/\!\sqrt{n}$ était décroissante et tendait vers 0. Par ailleurs, d'après **[3.a.]**,

$$F_n(x) = \mathfrak{Im}\Big(\frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}}\Big)$$

et d'après la question précédente,

$$\left|\frac{e^{ix}(1-e^{inx})}{1-e^{ix}}\right| = \frac{\left|\sin {}^{nx}\!/\!_2\right|}{\left|\sin {}^{x}\!/\!_2\right|}. \tag{‡}$$

Pour tout $x \in V_a = [a, 2\pi - a]$, on a

$$\frac{a}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \pi - \frac{a}{2}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|F_n(x)\right| \leqslant \frac{\left|\sin {}^{nx}\!/\!_2\right|}{\left|\sin {}^{x}\!/\!_2\right|} \leqslant \frac{1}{\sin {}^{a}\!/\!_2}.$$

La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément bornée sur $A = V_a$.

D'après **[6.]**, la série de fonctions $\sum u_n = \sum a_n f_n$ est uniformément convergente sur V_a.

8. c. La fonction U est la somme d'une série de fonctions continues et cette série converge uniformément sur V_a, donc la fonction U est continue sur V_a.

Comme U est continue sur V_a pour tout $0 < a < \pi$, elle est en fait continue sur

$$\bigcup_{0<a<\pi} [a, 2\pi - a] =]0, 2\pi[\,.$$

9. Pour conclure de la même manière qu'au **[8.b.]**, il suffit de prouver que la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin px$$

est uniformément bornée (pour $x \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$).

❧ En reprenant l'expression (‡) du **[8.b.]**, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin px\right| \leqslant \frac{\left|\sin {}^{nx}\!/\!_2\right| \left|\sin px\right|}{\left|\sin {}^{x}\!/\!_2\right|}.$$

On déduit de l'encadrement rappelé par l'énoncé que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin px\right| &\leqslant \left|\sin {}^{nx}\!/\!_2\right| \frac{\left|\sin px\right|}{{}^{x}\!/\!_\pi} \\ &\leqslant p\pi\left|\sin \frac{nx}{2}\right| \frac{\left|\sin px\right|}{px} \leqslant p\pi\end{aligned}$$

puisque la fonction *sinus cardinal* est bornée :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1.$$

REMARQUE.— L'encadrement rappelé par l'énoncé se déduit facilement du fait que la fonction sin est concave sur le segment $[0, \pi]$.

❧ On vient de démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin px\right| \leqslant p\pi.$$

Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la somme partielle est évidemment nulle, donc l'encadrement est encore vrai.

❧ On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0, \pi]$ et de $n \in \mathbb{N}^*$, cqfd : la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

10. a. Par hypothèse, la fonction U est continue par morceaux sur le segment $[-\pi, \pi]$. D'après **[7.]**, c'est une fonction *impaire*. Par parité de cos, le produit $U(t) \cos nt$ est une fonction impaire et continue par morceaux de t. Donc son intégrale sur le segment symétrique $[-\pi, \pi]$ est bien définie et nulle.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n(U) = 0$$

❧ Par imparité de sin, le produit $U(t) \sin nt$ est une fonction paire et continue par morceaux de t. Donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(U) = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

10. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

❧ Ici, l'entier p varie. On va donc noter $v_{n,p}$ au lieu de v_n.

❧ Il est clair que

$$b_n(U) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} v_{n,p}(t) \, dt.$$

Or la série $\sum_p v_{n,p}$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$ d'après **[9.]**. On peut donc intégrer terme à terme.

$$b_n(U) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} v_{n,p}(t) \, dt$$

D'après les formules rappelées par l'énoncé,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} v_{n,p}(t) \, dt = \int_0^{\pi} v_{n,n}(t) \, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(U) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

10. c. D'après le Théorème de Parseval (rappelé en préambule), il faut que la série $\sum b_n(U)^2$ converge. Or, d'après les calculs précédents,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n(U)^2 = \frac{1}{n}.$$

C'est contradictoire, ce qui prouve que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur le segment $[0, \pi]$.

Solution II ❀ Étude d'une série de fonctions

1. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ fixé, on a

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et comme la série $\sum {}^{1}\!/\!_{n^2}$ est absolument convergente, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente. La somme U de cette série de fonctions est donc bien définie sur $\mathcal{D}$.

Partie A. Régularité et ordre de grandeur de U

2. a. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, p \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathcal{D}, \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}$$

et cette formule est encore vraie pour $p = 0$ (en convenant que $u_n^{(0)} = u_n$).

2. b. Pour $-1 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$ et pour $p \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| = \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}} \leqslant \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}.$$

Les réels a et p étant fixés, le majorant est $\mathcal{O}(1/n^{p+2})$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la série $\sum 1/n^{p+2}$ est convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$ (et en fait sur $[a, +\infty[$).

2. c. La série $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$, qui converge simplement sur $]-1, +\infty[$ et les dérivées successives $\sum u_n^{(p)}$ convergent normalement sur $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Par conséquent, la somme U de cette série est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et dérivable terme à terme :

$$\forall\, x \in [a, b],\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Comme le segment $[a, b]$ est arbitrairement choisi dans $]-1, +\infty[$, on en déduit que U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et que

$$U^{(p)}(x) = (-1)^p(p+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{p+2}}$$

pour tout réel $x > -1$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$.

3. a. Si $x \in \mathcal{D}$, alors $x + N \in \mathcal{D}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} U(x) - U(x+N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+N}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{N} u_k(x) = U_N(x). \end{aligned}$$

3. b. L'intervalle ouvert $]-(N+1), -N[$ est contenu dans $\mathcal{D}$ et, sur cet intervalle,

$$U(x) = U_N(x) + U(N+x).$$

Comme $N + x > -1$, on déduit de la question précédente que le second membre est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc U est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-(N+1), -N[$.

Finalement, U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-(N+1), -N[$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, donc U est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur la réunion de ces intervalles, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}$.

4. Par **2.c.**, pour tout $x > -1$ et tout entier $p \geqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} = \frac{(-1)^p U^{(p-2)}(x)}{(p-1)!}.$$

La relation du **3.b.** montre que cette égalité est en fait vraie sur $\mathcal{D}$ tout entier.

5. Comme la fonction U est continue en 0, la composée $[x \mapsto U(N+x)]$ tend vers $U(0)$ lorsque x tend vers $-N$. D'autre part,

$$U_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(N+x)^2} \underset{x \to -N}{\sim} \frac{1}{(N+x)^2}$$

(il s'agit d'une somme finie de termes qui restent tous bornés, sauf un). D'après **3.b.**,

$$U(x) \underset{x \to -N}{\sim} \frac{1}{(N+x)^2}.$$

6. a. La fonction U est la somme d'une série de fonctions décroissantes sur $]-1, +\infty[$, donc elle est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Remarque.— On peut aussi invoquer **2.c.** et remarquer que la dérivée de U :

$$U'(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}$$

est strictement négative sur $]-1, +\infty[$.

6. b. La fonction $[t \mapsto 1/t^2]$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x > 0$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \int_{(n+x)}^{(n+1+x)} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_{(n-1+x)}^{(n+x)} \frac{dt}{t^2}.$$

(On se restreint à $x > 0$ pour que $(n - 1 + x) > 0$.) En sommant sur n, on en déduit que

$$\frac{1}{x+1} = \int_{x+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant U(x) \leqslant \int_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + o(1/x)$$

et l'encadrement précédent démontre alors que

$$U(x) = \frac{1}{x} + o(1/x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

7. Si $x > -1$, alors $x/2 > -1/2$ et $(x-1)/2 > -1$. S'il existe un entier $N < -1$ tel que $-(N+1) < x < N$, alors

$$-\frac{N+1}{2} < \frac{x}{2} < -\frac{N}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{N+2}{2} < \frac{x-1}{2} < -\frac{N+1}{2},$$

ce qui montre que $x/2$ et $(x-1)/2$ appartiennent tous les deux à $\mathcal{D}$. Par suite,

$$\begin{aligned} U\Big(\frac{x}{2}\Big) + U\Big(\frac{x-1}{2}\Big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1+x)^2} \\ &= 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = 4U(x). \end{aligned}$$

Partie B. Expression intégrale de U

8. Il est clair que f_p est continue sur $\mathbb{R}^*$. Au voisinage de $t=0$, on a $e^t - 1 \sim t$, donc $f_p(t) \sim t^p$. L'unique prolongement de f_p qui soit continu sur $\mathbb{R}$ est donc défini par

$$f_p(0) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } p = 0, \\ 0 \text{ si } p \in \mathbb{N}^*. \end{array} \right.$$

9. Lorsque t tend vers $+\infty$, on a $f_p(t) \sim t^{p+1}e^{-t}$.

10. Posons
$$\psi(x,t) = f_0(t)e^{-xt}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $[t \mapsto \psi(x,t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque f_0 est continue sur cet intervalle). De plus,
$$\psi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t}.$$

On *sait* que $[t \mapsto te^{-\alpha t}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 0$. Donc $[t \mapsto \psi(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $(x+1) > 0$, c'est-à-dire $x > -1$.

11. a. Pour $t \geqslant 0$, il est clair que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad 0 \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at}$$

et comme la fonction f_p est positive sur $]0,+\infty[$, l'encadrement demandé en découle.

11. b. La fonction $[t \mapsto f_p(t)e^{-at}]$ est continue sur $[0,+\infty[$ (puisque f_p l'est par **8.**) et

$$f_p(t)e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{p+1}e^{-(a+1)t} = o(e^{-(a+1)t/2}).$$

Comme $(a+1)/2 > 0$, cela prouve que $[t \mapsto f_p(t)e^{-at}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

12. Soit $a > -1$.

Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $[x \mapsto \psi(t,x)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et

$$\frac{\partial^p \psi}{\partial x^p}(t,x) = (-t)^p f_0(t)e^{-xt} = (-1)^p f_p(t)e^{-xt}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in [a,+\infty[$ et tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial^p \psi}{\partial x^p}(t,x)\right]$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après **11.b.**

D'après **11.a.**, la condition de domination est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $x \in [a,+\infty[$ et tout $t \in [0,+\infty[$.

Par conséquent, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et

$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} f_p(t)e^{-xt}\,dt.$$

Comme $a > -1$ est arbitrairement choisi, on en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et que

$$\forall\, x > -1,\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} f_p(t)e^{-xt}\,dt.$$

13. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels qui tend vers $+\infty$: on peut donc supposer que $x_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite de fonctions
$$\psi_n = [t \mapsto \psi(t,x_n)]$$
converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle et la convergence est dominée par **11.a.** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t > 0, \quad 0 \leqslant \psi_n(t) \leqslant \psi(t,0).$$

Par conséquent, $\varphi(x_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été arbitrairement choisie, on en déduit que la fonction φ tend vers 0 en $+\infty$.

14. a. Pour $x > -1$, on a $(x+1) > 0 > -1$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x+1) &= \int_0^{+\infty} t\frac{e^{-xt} - e^{-(x+1)t}}{e^t - 1}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} te^{-(x+1)t}\,dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on en déduit que

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) - \varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

14. b. Par **14.a.**, pour tout $x > -1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \big[\varphi(x+k) - \varphi(x+k+1)\big] = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+x)^2}$$

c'est-à-dire (par télescopage)

$$\varphi(x) - \varphi(x+n+1) = U_{n+1}(x).$$

Comme φ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que
$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = U(x).$$

15. En comparant **2.c.** et **12.** qui donnent les expressions de $U^{(p-2)}$ et de $\varphi^{(p-2)}$ sur $]-1,+\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^p} &= \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} f_{p-2}(t)e^{-xt}\,dt \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}e^{-xt}}{e^t - 1}\,dt. \end{aligned}$$