13
Vecteurs aléatoires

1. On expose ici la théorie propre aux phénomènes aléatoires *complexes*, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent pas être modélisés par une seule variable aléatoire réelle.

I

Loi d'une famille de variables aléatoires

2. Produit d'espaces mesurables discrets
Soient E_1 et E_2, deux ensembles au plus dénombrables, munis de leurs tribus discrètes respectives $\mathcal{E}_1 = \mathfrak{P}(E_1)$ et $\mathcal{E}_2 = \mathfrak{P}(E_2)$.
Le produit $E = E_1 \times E_2$ est au plus dénombrable et sa tribu discrète est notée $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

$$\mathfrak{P}(E_1) \otimes \mathfrak{P}(E_2) = \mathfrak{P}(E_1 \times E_2)$$

3. Lemme fondamental
Soient $X_1 : \Omega \to E_1$ et $X_2 : \Omega \to E_2$. On pose alors

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big).$$

3.1 Pour tout $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$[X = x] = [X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]$$

et pour tout $x_1 \in E_1$,

$$[X_1 = x_1] = \bigsqcup_{x_2 \in E_2} [X = (x_1, x_2)].$$

3.2 ➙ *Soit $(\Omega, \mathfrak{A})$, un espace probabilisable.*
Deux applications $X_1 : \Omega \to E_1$ et $X_2 : \Omega \to E_2$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ si, et seulement si, le couple

$$(X_1, X_2) : \Omega \to E_1 \times E_2$$

est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathfrak{A})$.
3.3 Ce résultat s'étend évidemment au cas d'un produit d'un nombre fini quelconque d'espaces mesurables discrets.

4. Si un phénomène aléatoire complexe est modélisé par plusieurs variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, on veillera à toujours considérer qu'il s'agit en fait d'un *vecteur* aléatoire

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

à valeurs dans le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

5. Le fait de lancer n fois de suite une pièce de monnaie est ainsi représenté par une variable aléatoire

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \{0,1\}^n,$$

dont la k-ième composante, la variable aléatoire discrète

$$X_k : \Omega \to \{0,1\},$$

décrit le résultat du k-ième lancer.

I.1 Cas d'un couple

6. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.
On considère deux variables aléatoires discrètes $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$ définies sur cet espace probabilisé et on note $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, les tribus discrètes respectives des ensembles finis ou dénombrables E_1 et E_2.

7. Avec ces deux variables aléatoires discrètes, on dispose des deux systèmes complets d'évènements

$$\big([X = x]\big)_{x \in E_1} \qquad \text{et} \qquad \big([Y = y]\big)_{y \in E_2}$$

ainsi que du système complet déduit de ces deux systèmes :

$$\big([X = x] \cap [Y = y]\big)_{(x,y) \in E_1 \times E_2},$$

qui est en fait le système complet associé à la variable aléatoire discrète (X, Y).

8. Loi conjointe
8.1 ✍ *La **loi du couple** (X, Y) est la mesure μ sur l'espace mesurable $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ définie par*

$$\forall\, A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \quad \mu(A) = \mathbf{P}\big([(X, Y) \in A]\big).$$

La loi du couple (X, Y) est aussi appelée **loi conjointe** *des variables aléatoires X et Y.*
8.2

$$\forall\, A \subset E_1 \times E_2, \quad [(X, Y) \in A] = \bigsqcup_{(x,y) \in A} [X = x] \cap [Y = y]$$

8.3 ➙ *La loi conjointe des variables X et Y est caractérisée* **[11.60]** *par la famille*

$$\big(\mathbf{P}(X = x, Y = y)\big)_{(x,y) \in E_1 \times E_2},$$

qui est une loi de probabilité discrète **[11.58]** *sur $E_1 \times E_2$.*

9. Tout ce qu'on peut savoir des variables aléatoires X et Y est contenu dans leur loi jointe : les lois de X et Y, dites ***lois marginales***, mais surtout la manière dont ces variables dépendent l'une de l'autre.

10. Lois marginales
10.1

$$\forall\, x \in E_1, \quad \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in E_2} \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

10.2

$$\forall\, y \in E_2, \quad \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in E_1} \mathbf{P}(X = x, Y = y)$$

10.3 ✍ *Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, les lois respectives de X et de Y sont appelées* **lois marginales** *du couple (X, Y).*

11. Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une loi de Bernoulli.

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}(p_1) \qquad Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathcal{B}(p_2)$$

11.1 La loi conjointe de X et Y est caractérisée par un quadruplet (a, b, c, d) de réels positifs dont la somme est égale à 1.

	$[X=0]$	$[X=1]$	
$[Y=0]$	a	b	$1-p_2$
$[Y=1]$	c	d	p_2
	$1-p_1$	p_1	

11.2 Il existe deux réels $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$ tels que

$$b = (1-\lambda)p_1, \quad c = (1-\mu)p_2, \quad d = \lambda p_1 = \mu p_2.$$

11.3 La connaissance des paramètres p_1 et p_2 ne permet pas de déterminer le quadruplet (a, b, c, d) : il faut connaître en outre la valeur du paramètre $\lambda = \mathbf{P}(Y = 1 \mid X = 1)$.

12. Méthode
Pour déterminer la loi jointe de X et Y, il ne suffit pas de connaître leurs lois marginales : il faut en outre connaître les dépendances qui relient ces deux variables aléatoires. →**[16.8]**

12.1 Si $\mathbf{P}(X = x) = 0$, alors

$$\forall\, y \in E_2, \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = 0.$$

Sinon,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(Y = y \mid X = x)\,\mathbf{P}(X = x).$$

Il suffit donc de connaître la loi (marginale) de X ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in E_1$ tel que $\mathbf{P}(X = x) > 0$.

12.2 De même, si $\mathbf{P}(Y = y) = 0$, alors

$$\forall\, x \in E_1, \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = 0$$

et dans le cas contraire,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x \mid Y = y)\,\mathbf{P}(Y = y).$$

Il suffit donc de connaître la loi (marginale) de Y ainsi que la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in E_2$ tel que $\mathbf{P}(Y = y)$.

Exemples

13.1 Soit (X, Y), un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n,n} = \mathbf{P}\big([X = n] \cap [Y = n]\big) = \frac{1}{n(n+1)}$$

et par

$$p_{m,n} = \mathbf{P}\big([X = m] \cap [Y = n]\big) = 0$$

quels que soient $m \neq n$ dans $\mathbb{N}^*$.

13.2 Les lois marginales de X et de Y sont les mêmes.

13.3 La loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = n]$ est une loi de Dirac.

14. Soient X et N, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Si N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et $p > 0$:

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

alors les variables aléatoires X et $Y = N - X$ suivent la loi de Poisson de paramètres respectifs λp et $\lambda(1-p)$. →**[23.3]**

15. Lois binomiales négatives
Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $N = X + Y$ suit la ***loi binomiale négative*** de paramètres $(2, p)$:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(N = k) = (k+1)p^2 q^k$$

(avec $q = 1 - p$) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = i \mid N = n) = \frac{1}{n+1}.$$

15.1 Les variables X et Y suivent la loi binomiale négative de paramètres $(1, p)$:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k.$$

15.2 La loi jointe du couple

$$(D, M) = \big(X - Y, \min\{X, Y\}\big)$$

est donnée par

$$\forall\, (h, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(D = h, M = k) = p^2 q^{|h| + 2k}$$

donc M suit la loi binomiale négative de paramètres $(1, [1+q]p)$ et D est une variable aléatoire centrée. →**[23.4]**

I.2 Cas d'une famille finie

16. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.

16.1 Des variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad X_k : \Omega \to E_k$$

doivent être considérées comme un ***vecteur aléatoire*** discret :

$$X = (X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} : \Omega \to E$$

à valeurs dans l'ensemble produit

$$E = E_1 \times \cdots \times E_n.$$

Les ensembles $E_1, \ldots, E_n$ et E, qui sont tous finis ou dénombrables, sont munis de leurs tribus discrètes respectives : $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}$.

16.2 Ce vecteur aléatoire définit un système complet d'évènements :

$$[X = (x_1, \ldots, x_n)] = [X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n] \in \mathfrak{A}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ parcourt l'ensemble E.

16.3 Réciproquement, chaque composante d'un vecteur aléatoire est une variable aléatoire :

$$[X_k \in A_k] = [X \in E_1 \times \cdots \times A_k \times \cdots \times E_n] \in \mathfrak{A}$$

quels que soient $1 \leqslant k \leqslant n$ et $A_k \in \mathcal{E}_k$.

16.4 ✍ *La* **loi du vecteur** *X est la mesure de probabilité μ définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ par*

$$\forall\, A \subset E, \quad \mu(A) = \mathbf{P}\big([(X_1, \ldots, X_n) \in A]\big).$$

Cette loi est aussi appelée **loi conjointe** *des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.*

16.5 ➔ *La loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ est caractérisée par la famille*

$$\big(\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)\big)_{(x_1, \ldots, x_n) \in E}.$$

16.6 ✍ *Les lois respectives des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont appelées* **lois marginales** *du vecteur aléatoire X.*

16.7 La connaissance de la loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ détermine les lois marginales : quels que soient $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x_k \in E_k$,

$$\mathbf{P}(X_k = x_k) = \sum_{\substack{(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \\ y_k = x_k}} \mathbf{P}\big(X = (y_1, \ldots, y_n)\big).$$

16.8 La connaissance des seules lois marginales ne permet pas de reconstituer la loi conjointe de $X_1, \ldots, X_n$. →**[11]**
En général, la loi conjointe ne peut être caractérisée qu'en appliquant la formule des probabilités composées : →**[12]**
quel que soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}&(X_1 = x_1) \\ &\times \mathbf{P}(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) \\ &\times \mathbf{P}(X_3 = x_3 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2) \times \cdots \\ &\times \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}).\end{aligned}$$

16.9 Dans le calcul précédent, les variables peuvent apparaître dans un ordre quelconque : la probabilité $\mathbf{P}(X = x)$ est égale à

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_{\sigma(1)} = x_{\sigma(1)})\,\mathbf{P}(X_{\sigma(2)} = x_{\sigma(2)} \mid X_{\sigma(1)} = x_{\sigma(1)}) \times \\ &\quad \mathbf{P}(X_{\sigma(3)} = x_{\sigma(3)} \mid X_{\sigma(1)} = x_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)} = x_{\sigma(2)}) \times \cdots \times \\ &\quad \mathbf{P}(X_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)} \mid X_{\sigma(1)} = x_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n-1)} = x_{\sigma(n-1)})\end{aligned}$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Entraînement

17. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant.

	$[X = 0]$	$[X = 1]$	$[X = 2]$
$[Y = 1]$	$1/12$	0	$1/12$
$[Y = 2]$	$1/6$	$1/12$	$1/12$
$[Y = 3]$	a	b	c

On suppose en outre que la probabilité de l'évènement : $[X$ *est paire*$]$ est le triple de la probabilité de l'évènement : $[X$ *est impaire*$]$ et que $\mathbf{P}(X = 0) = 2\,\mathbf{P}(X = 2)$.

17.1 Les valeurs de a, b et c sont alors déterminées et

$$\mathbf{E}(X) = \frac{3}{4}, \quad \mathbf{E}(Y) = \frac{7}{3}, \quad \mathbf{Cov}(X, Y) = \frac{-1}{12}$$

17.2 La loi du couple

$$(U, V) = \big(\min(X, Y), \max(X, Y)\big)$$

est donnée par le tableau suivant :

	$[U = 0]$	$[U = 1]$	$[U = 2]$
$[V = 1]$	$1/12$	0	0
$[V = 2]$	$1/6$	$1/6$	$1/12$
$[V = 3]$	$1/4$	$1/6$	$1/12$

et $\mathbf{E}(U) = 2/3$, $\mathbf{E}(V) = 29/12$, $\mathbf{Cov}(U, V) = 1/18$.

18. Soient X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
S'il existe un réel α tel que

$$\forall\,(i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{\alpha}{2^{i+1} j!},$$

alors $\alpha = e^{-1}$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 1$.

19. Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

et que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, k\}$:

$$\forall\, 1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(Y = h \mid X = k) = \frac{1}{k}.$$

Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de Y.

II

Variables aléatoires indépendantes

20. L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_1, ..., X_n permet de reconstituer la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ (*loi conjointe*) à partir des lois marginales et rend la formule des probabilités composées [**16.8**] inutile.

21. Soient X_1, ..., X_n, des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans des ensembles E_1, ..., E_n munis des tribus $\mathcal{E}_1$, ..., $\mathcal{E}_n$ respectivement.

21.1 ✍ *Le vecteur aléatoire* $(X_1, \dots, X_n)$ *est une famille de* **variables aléatoires indépendantes** *lorsque*

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in A_k)$$

quelles que soient les parties mesurables $A_1 \in \mathcal{E}_1$, ..., $A_n \in \mathcal{E}_n$.

21.2 Le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes si, et seulement si, les évènements

$$[X_1 \in A_1], \quad [X_2 \in A_2], \quad \dots, \quad [X_n \in A_n]$$

sont indépendants [**11.37**] quelles que soient les parties mesurables $A_1 \in \mathcal{E}_1$, ..., $A_n \in \mathcal{E}_n$.

21.3 ➙ *Des variables aléatoires discrètes*

$$X_1 : \Omega \to E_1, \quad \dots, \quad X_n : \Omega \to E_n$$

constituent une famille de variables aléatoires indépendantes si, et seulement si,

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k = x_k)$$

quels que soient $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.

22. L'indépendance des variables aléatoires reste relative au choix de la mesure de probabilité. En conditionnant par un évènement bien choisi, on peut créer une corrélation entre des variables aléatoires indépendantes. →[**37**], [**39**]

23. Exemples

23.1 La loi jointe d'un couple (X, Y) de variables de Bernoulli est représentée par le tableau suivant.

	$[X = 0]$	$[X = 1]$
$[Y = 0]$	$1/6 + p$	$1/3 - p$
$[Y = 1]$	$1/2 - p$	p

Quelles sont les valeurs possibles pour le paramètre p ?
Pour quelle valeur de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

23.2 *Suite de* [**13**] – Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

23.3 *Suite de* [**14**] – Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

23.4 *Suite de* [**15**] – Les couples (X, Y) et (D, M) sont deux familles de variables aléatoires indépendantes, mais pas les variables X, Y, D, M ne sont pas indépendantes. →[**40**]

23.5 *Suite de* [**18**] – Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Coalitions

24. Soit $(X_1, \dots, X_n)$, une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

24.1 La famille

$$(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

est une famille de variables aléatoires indépendantes, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

24.2 Toute sous-famille $(X_{k_1}, \dots, X_{k_m})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

24.3 Quelles que soient les fonctions f_1, ..., f_n de E dans F, les variables aléatoires discrètes $f_1(X_1)$, ..., $f_n(X_n)$ sont indépendantes.

24.4 ➙ *Quels que soient l'entier* $1 \leqslant m \leqslant n$ *et les fonctions*

$$f : E^m \to F \quad \text{et} \quad g : E^{n-m} \to F,$$

les variables aléatoires discrètes

$$Y = f(X_1, \dots, X_m) \quad \text{et} \quad Z = g(X_{m+1}, \dots, X_n)$$

sont indépendantes.

24.5 Exemples

Soit $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une famille de variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes.

2. Les variables aléatoires X_1 et $X_2 \cdots X_n$ sont indépendantes.
3. Si $n = 2p$, alors les variables aléatoires

$$Y = X_1 + X_3 + \cdots + X_{2p-1} \quad \text{et} \quad Z = X_2 + X_4 + \cdots + X_{2p}$$

sont indépendantes.
4. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors les variables aléatoires réelles t^{X_1} et $t^{X_2+\cdots+X_n}$ sont indépendantes.

Calculs d'espérances

25. On suppose ici que toutes les variables aléatoires considérées sur définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.
25.1 ➞ *Si X et Y sont des variables aléatoires d'espérance finie et indépendantes, alors le produit XY est une variable aléatoire d'espérance finie et*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).$$

25.2 ▷ *Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \mathbf{E}(t^{X+Y}) = \mathbf{E}(t^X)\,\mathbf{E}(t^Y).$$

25.3 ➞ *Deux variables aléatoires X et Y d'espérance finie et indépendantes sont décorrélées :*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0.$$

25.4 ➞ *Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et de carré intégrable, alors*

$$\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k).$$

25.5 Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, de carré intégrable et de même écart type $\sigma > 0$, alors les variables aléatoires

$$Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k \quad \text{et} \quad Z = \sum_{k=1}^{n} \mu_k X_k$$

sont décorrélées si, et seulement si,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k = 0.$$

Échantillons i.i.d.

26. La loi d'une variable aléatoire X décrit les fréquences d'apparition des différentes valeurs prises par X, c'est-à-dire la manière dont ces valeurs sont *réparties* ou *distribuées*.
26.1 ✍ *Des variables aléatoires sont dites* **identiquement distribuées*** *lorsqu'elles suivent la même loi.* →[**12**.5.4]
26.2 ✍ *Le vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ est un* **échantillon (de variables) i.i.d.*** *lorsque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées.*
27. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$, un échantillon i.i.d.
27.1 Les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

ont même loi, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
27.2 Les variables aléatoires $X_2, \ldots, X_n$ sont d'espérance finie si, et seulement si, X_1 est une variable d'espérance finie et dans ce cas

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{E}(X_k) = \mathbf{E}(X_1).$$

27.3 Si X_1 est une variable aléatoire d'espérance finie, alors le produit $X_1 X_2 \cdots X_n$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = [\mathbf{E}(X_1)]^n.$$

27.4 Les variables aléatoires $X_2, \ldots, X_n$ ont un moment d'ordre deux si, et seulement si, X_1 a un moment d'ordre deux et dans ce cas

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{V}(X_k) = \mathbf{V}(X_1).$$

27.5 ➞ *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$, une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X de carré intégrable. Alors la somme*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

est une variable aléatoire de carré intégrable et

$$\mathbf{E}(S_n) = n\,\mathbf{E}(X) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{V}(S_n) = n\,\mathbf{V}(X).$$

En particulier, la variable aléatoire

$$S_n^* = \frac{S_n - n\,\mathbf{E}(X)}{\sqrt{n}\sigma(X)}$$

est centrée et réduite.

28. Lois stables
28.1 ➞ *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$, une famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$. La fonction caractéristique de la somme*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

est donnée par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \mathbf{E}(t^{S_n}) = \left[\mathbf{E}(t^X)\right]^n.$$

28.2 Si les X_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, alors S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
28.3 Si chaque X_k suit la loi binomiale de paramètres m_k et p, alors la somme S_n suit la loi binomiale de paramètres m et p, avec $m = (m_1 + \cdots + m_n)$.
28.4 En particulier (pour $n = 2$),

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant m_1 + m_2, \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{m_1}{i}\binom{m_2}{k-i} = \binom{m_1+m_2}{k}.$$

Cette égalité, dite ***identité de Vandermonde***, décrit le nombre de manière de choisir un groupe de k personnes dans un ensemble de m_1 hommes et m_2 femmes : expliquer.
28.5 Si chaque X_k suit la loi de Poisson de paramètre λ_k, alors S_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
28.6 Si les X_k suivent toutes la loi géométrique de paramètre p, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est caractérisée par :

$$\forall\, k \geqslant n, \qquad \mathbf{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

et son espérance est égale à $^n/_p$.

Loi des grands nombres

29. Famille infinie de variables indépendantes
Une famille $(X_t)_{t \in I}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ modélise l'évolution d'un processus aléatoire au cours du temps.
29.1 En général, toutes ces variables aléatoires prennent leurs valeurs dans un même espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, dit ***espace des états***.
29.2 ✍ *La famille $(X_t)_{t \in I}$ est une famille de* **variables aléatoires indépendantes** *lorsque, quels que soient l'entier $n \geqslant 2$ et les instants $t_1, \ldots, t_n$ dans I, le vecteur aléatoire*

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

est une famille de variables aléatoires indépendantes.
29.3 On distingue les processus ***à temps discret***, pour lesquels $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, et les processus ***à temps continu***, pour lesquels $I = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.

29.4 ➙ *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, le vecteur aléatoire $(X_0,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.*

30. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires de carré intégrable. On suppose que ces variables sont deux à deux non corrélées :

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell, \qquad \mathsf{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$$

et ont même espérance et même variance :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathsf{E}(X_k) = m, \quad \mathsf{V}(X_k) = \sigma^2.$$

30.1 La ***moyenne empirique*** :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

est une variable aléatoire de carré intégrable, d'espérance m et de variance ${}^{\sigma^2}/_{n}$.

30.2 Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

30.3 ➙ **Loi faible des grands nombres**

Soit X, une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre deux. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées et de même loi que X, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mathsf{E}(X)\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

31. On appelle ***loi des grands nombres*** tout théorème qui donne une interprétation fréquentiste de la probabilité d'un évènement : lors de la réalisation d'un grand nombre d'expériences aléatoires, la probabilité d'un évènement A est proche de la fréquence de réalisation de A.

31.1 Si une variable aléatoire X est choisie comme ***modèle théorique*** d'une expérience aléatoire, alors une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X représente un ***échantillon*** de réalisations de cette expérience dans des conditions identiques.

La loi faible des grands nombres [**30.3**] affirme alors que la moyenne empirique ${}^{S_n}/_{n}$ ***converge en probabilité*** [**12.96.1**] vers l'espérance théorique $\mathsf{E}(X)$, qui est aussi l'espérance de toutes les variables X_n.

31.2 Soient $A \in \mathcal{E}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X donnée. Alors la famille

$$\big(\mathbb{1}_{[X_n\in A]}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable et la moyenne empirique ${}^{S_n}/_{n}$, qui est ici la ***fréquence empirique***

$$\frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n \;:\; X_k \in A\}}{n}$$

de l'évènement $[X \in A]$, converge en probabilité vers

$$\mathsf{E}(\mathbb{1}_{[X\in A]}) = \mathsf{P}(X \in A).$$

31.3 La ***loi forte des grands nombres*** affirme que : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et de même loi, alors la moyenne empirique ***converge presque sûrement*** vers l'espérance commune aux variables X_n, ce qui signifie que

$$\Big[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathsf{E}(X)\Big]$$

est un évènement presque sûr. →[**106**]

Entraînement

32. Questions pour réfléchir

1. Les évènements $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{A}$ sont indépendants si, et seulement si, les variables de Bernoulli $\mathbb{1}_{B_1}, \dots, \mathbb{1}_{B_n}$ forment une famille de variables aléatoires indépendantes.

2. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si, et seulement si, les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes quelles que soient les fonctions $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}, \dots, f_n : E_n \to \mathbb{R}$.

3. Soient X et Y, deux variables aléatoires discrètes qui prennent leurs valeurs dans

$$E = \{e_1, \dots, e_p\} \quad \text{et} \quad F = \{f_1, \dots, f_n\}$$

respectivement. Ces variables sont indépendantes si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\big(\mathsf{P}(X = e_j, Y = f_i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

est égal à 1.

4. Les variables aléatoires discrètes X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si, il existe deux fonctions $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad \mathsf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2).$$

5. On suppose que $\mathsf{P}(X \leqslant Y) = 1$.

5.a Les variables X et Y peuvent-elles être indépendantes ?

5.b Si X et Y suivent les lois géométriques de paramètres respectifs p_x et p_y, alors elles ne sont pas indépendantes et de plus $p_x \geqslant p_y$.

6. *Suite de* [**24**] – Soient $I_1, \dots, I_r$, des parties deux à deux disjointes de $\{1, \dots, n\}$, de cardinaux respectifs $k_1, \dots, k_r$. Alors les variables aléatoires discrètes

$$f_1(X_i,\, i \in I_1), \quad f_2(X_i,\, i \in I_2), \quad \dots \quad f_r(X_i,\, i \in I_r)$$

sont indépendantes, quelles que soient les fonctions

$$f_1 : E^{k_1} \to F_1, \quad f_2 : E^{k_2} \to F_2, \quad \dots \quad f_r : E^{k_r} \to F_r.$$

7. On suppose que, quelles que soient les fonctions bornées $f_1, \dots, f_n$,

$$\mathsf{E}\big(f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\big(f_k(X_k)\big).$$

Alors les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

8. *Suite de* [**30.1**] – La moyenne empirique ${}^{S_n}/_{n}$ converge **en moyenne quadratique** vers m au sens où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{E}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big|^2\Big) = 0.$$

9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X de carré intégrable. Pour $n \geqslant 25$, la moyenne empirique diffère de l'espérance théorique $\mathsf{E}(X)$ de moins de deux fois l'écart-type $\sigma(X)$ avec une probabilité supérieure à $0,99$.

10. *Suite de* [**30.3**] –

10.a Si $x < m$, alors $\mathsf{P}({}^{S_n}/_{n} \leqslant x)$ tend vers 0.

10.b Si $x > m$, alors $\mathsf{P}({}^{S_n}/_{n} \leqslant x)$ tend vers 1.

11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires d'espérance finie, presque sûrement positives.

11.a Si $\mathsf{E}(X_n)$ tend vers 0, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité [**12.96.1**] vers 0 :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathsf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

11.b Si

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathsf{P}(X_n = n^2) = {}^{1}/_{n} \quad \text{et} \quad \mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - {}^{1}/_{n}$$

alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0 mais $\mathsf{E}(X_n)$ tend vers $+\infty$.

33. Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que X et Y ont même loi et que

$$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=2) = 1/3,$$
$$\mathbf{P}(Z=0) = 1/3, \quad \mathbf{P}(Z=1) = 2/3.$$

On pose $U = X$ et $V = X + Z \pmod 3$.

33.1 Les couples (X, Y) et (U, V) ont des lois différentes bien que

$$U \stackrel{\mathrm{d}}{=} X, \quad V \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y, \quad (U+V) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X+Y).$$

33.2 Les variables aléatoires U et V ne sont pas corrélées et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \mathbf{E}(t^{U+V}) = E(t^U)\,\mathbf{E}(t^V)$$

alors que U et V ne sont pas indépendantes. →**[51]**

34. On suppose que les deux variables aléatoires X et Y, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, suivent la loi géométrique de paramètre p. On pose

$$W = \min\{X, Y\} \qquad \text{et} \qquad Z = \max\{X, Y\}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[W \geqslant n] = [X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n],$$
$$[W = n] = [W \geqslant n] \cap [W \geqslant n+1]^c,$$
$$[Z \leqslant n] = [X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n],$$
$$[Z = n] = [Z \leqslant n] \cap [Z \leqslant n-1]^c$$

donc W et Z sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

2. Si X et Y sont indépendantes, alors W et Z ne sont pas indépendantes, mais **[15]** les variables W et $(Z - W) = |X - Y|$ sont indépendantes.

35.1 La matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

35.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & 0 & b \\ 0 & a\sqrt{2} & b \\ b & b & a\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ et $a^2 \neq b^2$.

35.3 Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, qui suivent la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. La probabilité pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X\sqrt{2} & 0 & Y \\ 0 & X\sqrt{2} & Y \\ Y & Y & X\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

soit inversible est égale à $2q/(1+q)$, où $q = 1 - p$.

36. Soient $n \geqslant 3$ et $J_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

36.1 Quels que soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice

$$M(a, b) = (a - b)I_n + bJ_n$$

est diagonalisable.

36.2 Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi et qui admettent un moment d'ordre 2, alors les variables aléatoires

$$\lambda = X - Y \quad \text{et} \quad \mu = X + (n-1)Y$$

ne sont pas indépendantes.

36.3 En particulier, si X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p, alors la probabilité pour que la matrice aléatoire $M(X, Y)$ soit inversible est égale à $2q/(1+q)$ où $q = 1 - p$.

37. Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et qu'elles suivent la loi géométrique de paramètre p et on pose $q = 1 - p$.

37.1 La loi de $S = X + Y$ est caractérisée par

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(S = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}.$$

37.2 Conditionnellement à $[S = n]$, les variables aléatoires X et Y suivent une loi uniforme et ne sont pas indépendantes. Comparer avec **[15]**.

38. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent les lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

38.1 La variable aléatoire $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\tau = \lambda + \mu$.

38.2 La loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et λ/τ. Comparer avec **[14]**.

39. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, qui suivent toutes la loi de Poisson de paramètre 1.

39.1 La somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre n.

39.2 Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à l'évènement $[S_n = s]$, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres s et $1/n$:

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant s, \quad \mathbf{P}_{[S_n = s]}(X_n = k) = \binom{s}{k} \frac{1}{n^k} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{s-k}.$$

39.3 Pour $s \geqslant 1$, les évènements $[X_1 = s]$ et $[X_2 = s]$ sont indépendants pour $\mathbf{P}$, mais incompatibles pour $\mathbf{P}_{[S_n = s]}$, donc les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes pour la mesure de probabilité $\mathbf{P}_{[S_n = s]}$.

40. *Suite de* **[15]** – Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables aléatoires

$$D = X - Y \quad \text{et} \quad M = \min\{X, Y\}$$

sont indépendantes et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{\mathbf{P}(X = n+1, Y = n)}{\mathbf{P}(X = n, Y = n)}.$$

Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{\mathbf{P}(D = 1)}{\mathbf{P}(D = 0)},$$

alors X et Y suivent la loi binomiale négative de paramètres $(1, 1 - r_0)$.

41. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et indépendantes. On suppose que X_n suit la loi de Poisson de paramètre n pour tout $n \geqslant 1$.

41.1 L'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^2}$$

sont respectivement égales à $(n+1)/(2n)$ et à $(n+1)/(2n^3)$.

41.2 Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n assez grand,

$$\big[\big|Y_n - \mathbf{E}(Y_n)\big| \leqslant \varepsilon/2\big] \subset \big[\big|Y_n - 1/2\big| \leqslant \varepsilon\big]$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\big(\big|Y_n - 1/2\big| \leqslant \varepsilon\big) = 1.$$

42. Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables sont indépendantes et qu'elles suivent respectivement les lois binomiales de paramètres (n, p) et de (n', p). La loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = k]$ est la ***loi hypergéométrique*** caractérisée par :

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant k, \quad \mathbf{P}(X = i \mid X + Y = k) = \frac{\binom{n}{i}\binom{n'}{k-i}}{\binom{n+n'}{k}}.$$

43. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_k = X_k + X_{k+1}.$$

1. Calculer la loi, l'espérance et la variance de Y_k.
2. Les variables aléatoires Y_k sont-elles corrélées ? indépendantes ?
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

44. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n = X_n + X_{n+1}X_{n+2}.$$

44.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y_n) &= pq(1+p+p^2)\\ \mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= p^2q(1+p)\\ \mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+2}) &= p^2q\end{aligned}$$

et $\mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+j}) = 0$ pour tout $j \geqslant 3$.

44.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de la variable aléatoire

$$Z_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$$

est égale à $p(1+p)$ et sa variance est majorée par $3/n$.

45. On répartit $N = an$ boules dans n urnes où $a \in \mathbb{N}^*$. On modélise cette répartition par une famille $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ de variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi uniforme sur $E = \{1, \dots, n\}$: la variable U_k donne le numéro de l'urne où ira la k-ième boule.

45.1 Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $X_i = 1$ si la i-ème urne est vide et $X_i = 0$ dans le cas contraire.

1. Comme

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad [X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{N} [U_k \neq i],$$

les X_i sont des variables de Bernoulli de même paramètre.

2. Pour $i \neq j$,

$$\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \Big(1 - \frac{2}{n}\Big)^N - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{2N}.$$

45.2 On note Y_n, le nombre d'urnes qui restent vides :

$$Y_n = X_1 + \cdots + X_n$$

et on pose $S_n = Y_n/n$.

3. Comme l'espérance de S_n tend vers e^{-a} et que sa variance tend vers 0, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\big(|S_n - e^{-a}| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les hypothèses de la loi des grands nombres [30.3] sont-elles vérifiées ?

46. **Exposant des grandes déviations**
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, un seuil tel que

$$\mathbf{P}(X_1 \geqslant a) > 0.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

46.1 Quels que soient les entiers $1 \leqslant k < \ell$,

$$\mathbf{Cov}(S_k, S_\ell) = \mathbf{V}(S_k) > 0$$

donc les variables aléatoires S_n ne sont pas indépendantes.

46.2 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \geqslant a] \subset [S_n \geqslant na]$$

et $\mathbf{P}(S_n \geqslant na) > 0$.

46.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ell\text{n}\,\mathbf{P}(S_n \geqslant na).$$

1. Le réel

$$\gamma_a = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$$

est bien défini. Il est négatif et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}.$$

Bien entendu, cette majoration n'est intéressante que si $\gamma_a < 0$.

2. Quels que soient $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ et $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbf{P}(S_k = u, S_{k+\ell} = v) = \mathbf{P}(S_k = u)\,\mathbf{P}(S_\ell = v).$$

3. Quels que soient k et ℓ dans $\mathbb{N}^*$,

$$u_{k+\ell} \geqslant u_k + u_\ell.$$

On peut en déduire que le quotient u_n/n tend vers γ_a et que la majoration de $\mathbf{P}(S_n \geqslant na)$ qu'on a donnée est d'autant plus précise que n est grand. →[92]

Utilisation des fonctions génératrices

47. **Un trucage impossible**

47.1 Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un diviseur de

$$P_0 = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^8 + X^9 + X^{10},$$

alors le degré de P est pair.

47.2 On lance deux dés truqués : la somme des points obtenus est représentée par $S = D_1 + D_2$, où D_1 et D_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quelles que soient les lois de D_1 et D_2, la variable S ne peut suivre la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

48. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent les lois binomiales de paramètres respectifs $(4, p)$ et $(4, q)$. Caractériser la loi de $X + Y$ et comparer avec [28.3].

49. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que leur somme $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre 2λ.

1. Si X et Y ont même loi, alors cette loi est la loi de Poisson de paramètre λ.
2. Si X suit une loi de Poisson, alors Y suit aussi une loi de Poisson.
3. Comparer avec [28.5].

50. Soient X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{a}, \mathbf{P})$. On suppose que la somme $(X + Y)$ suit la loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de la variable X sachant l'évènement $[X + Y = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et $\lambda/(\lambda + \mu)$.
Comme t^X est une variable aléatoire d'espérance finie pour tout $t \in [0, 1]$, on peut appliquer la ***formule de l'espérance totale*** à la fonction génératrice de X : →[**12.46**]

$$\mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_{[X+Y=n]}(t^X)\,\mathbf{P}(X + Y = n)$$

et retrouver ainsi la loi de X. →[14]

51. Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall\, 0 \leqslant s, t \leqslant 1, \quad \mathbf{E}(s^X t^Y) = \mathbf{E}(s^X)\,\mathbf{E}(t^Y).$$

52. Un estimateur sans biais [69]
Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2} q^{k-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$$

et comme

$$\forall\, k \geqslant n \geqslant 2, \quad \frac{n-1}{k-1}\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-2}{n-2}$$

alors l'espérance de la variable aléatoire

$$R_n = \frac{n-1}{S_n - 1}$$

est égale à p.

53. Processus de branchement [12.34]
Soit $(N, X_1, X_2, \dots)$, une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les variables X_k suivent toutes la même loi, représentée par la fonction génératrice G et que la fonction génératrice H de N vérifié : $H(0) = 0$.
On définit alors la fonction $S : \Omega \to \mathbb{N}$ par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

53.1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

est une variable aléatoire et comme

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [S = k] = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} [S_n = k] \cap [N = n],$$

la fonction S est aussi une variable aléatoire.
53.2 La fonction génératrice de S est la fonction $H \circ G$. Relier l'espérance de S à l'espérance de N et à l'espérance des X_k.
53.3 Si G est la fonction génératrice de la loi géométrique de paramètre p, alors $H = G$ si, et seulement si, S suit la loi géométrique de paramètre p^2.

54. Premier succès, premier échec
On considère une suite de variables aléatoires $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que B_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et que :
— Conditionnellement à l'évènement $[B_0 = 0]$, les variables $(B_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$;
— Conditionnellement à l'évènement $[B_0 = 1]$, les variables $(B_n)_{n\geqslant 1}$ sont toutes presque sûrement égales à 1.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $X(\omega) = 0$ si $B_n(\omega) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$X(\omega) = \min\{n \geqslant 1 : B_n(\omega) = 0\}$$

dans le cas contraire. De même, on pose $Y(\omega) = 0$ si $B_n(\omega) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$Y(\omega) = \min\{n \geqslant 1 : B_n(\omega) = 1\}.$$

54.1 Calculer la probabilité de l'évènement

$$F_n = [B_1 = 1, \dots, B_n = 1]$$

ainsi que $\mathbf{P}(B_0 = 0 \mid F_n)$ et la limite de ces probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.

54.2 Les fonctions génératrices de X et Y sont

$$G_X(x) = \frac{1}{2-x} \quad \text{et} \quad G_Y(x) = \frac{3x - x^2}{4 - 2x}.$$

En particulier, $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{V}(X) = 2$, $\mathbf{E}(Y) = 3/2$ et $\mathbf{V}(Y) = 5/4$.
54.3 La loi de la variable aléatoire $S = \max\{X, Y\}$ est donnée par $[S = 1] = [X = 0] \cup [Y = 0]$ et

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad [S = n] = [X = n] \cup [Y = n].$$

54.4 La variable aléatoire $I = \min\{X, Y\}$ suit une loi de Bernoulli.
54.5 Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

III

Modèles probabilistes usuels

III.1 Modèles d'urnes

55. Tirages avec remise
Lorsqu'on procède à un tirage avec remise dans une urne, la composition de l'urne est la même pour chaque tirage. Il est raisonnable dans ce cas de modéliser les tirages par un échantillon i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ et d'effectuer tous les calculs en fonction des variables X_1, ..., X_n.

56. Tirages sans remise
Lorsqu'on procède à un tirage sans remise dans une urne, la composition de l'urne est modifiée après chaque tirage. Dans ce cas, l'hypothèse d'indépendance des variables X_1, ..., X_n qui modélisent les résultats des tirages successifs n'est plus justifiée.
56.1 On peut proposer un modèle qui repose sur la formule des probabilités composées [16.8] en décrivant le premier tirage (loi de X_1), puis les tirages ultérieurs en fonction de la composition de l'urne (loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 ; loi conditionnelle de X_3 sachant X_1 et X_2...).
56.2 On peut aussi proposer un modèle global qui décrit simplement la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$.
Si, par exemple, les boules sont numérotées de 1 à n, la succession des n tirages peut s'identifier à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et il peut être raisonnable de munir l'espace discret $\mathfrak{S}_n$ de la mesure de probabilité uniforme.
Dans ce cas, la loi de chaque variable X_k doit être *calculée* en fonction du modèle : il serait logiquement hasardeux de proposer simultanément une loi pour le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ et une loi pour la variable X_1 (risque de contradiction entre la loi conjointe et la loi marginale).
56.3 Il arrive qu'on procède à un *petit* nombre de tirages sans remise dans une *grande* urne. Dans ce cas, il est raisonnable de supposer que la composition de l'urne varie très peu d'un tirage à l'autre et l'hypothèse de tirages indépendants et de même loi est malgré tout acceptable.

Exemples

57. Une urne contient deux boules jaunes et huit boules rouges. Un joueur tire successivement cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule jaune tirée, il gagne deux points et pour chaque boule rouge tirée, il perd trois points. On note X, le nombre aléatoire de boules jaunes tirées et Y, le nombre aléatoire de points obtenus par le joueur au terme de la partie.
1. Proposer un modèle probabiliste en supposant que les tirages sont faits avec remise. Déterminer les lois de X et de Y pour ce modèle.
2. Et si les tirages sont faits sans remise ?

58. On dispose de n boules, numérotées de 1 à n, et d'une boîte formée de trois compartiments identiques, numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules, qui se rangent aléatoirement dans les trois compartiments (chaque compartiment pouvant éventuellement contenir les n boules).
On note X, le nombre aléatoire de compartiments qui restent vides.

1. Proposer un modèle probabiliste de cette expérience pour lequel X est une variable aléatoire.
2. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Déduire du modèle choisi les valeurs de $\mathbf{P}(X = 2)$ et de $\mathbf{P}(X = 1)$. En déduire l'espérance de X et la limite de $\mathbf{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

59. On dispose de deux urnes. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

— On choisit une première urne au hasard.
— Chaque boule tirée est remise dans l'urne d'où elle provient.
— Si la boule tirée est blanche (resp. noire), le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 (resp. dans l'urne U_2).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbf{P}(B_n)$, où B_n est l'évènement *la boule lors du n-ième tirage est blanche*.
Proposer un modèle probabiliste de cette expérience pour établir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.

60. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotés de 1 à n et deux boules noires numérotés 1 et 2. On vide l'urne par des tirages sans remise (une boule à chaque fois). On note X, le rang aléatoire d'apparition de la première boule blanche et Y, le rang aléatoire d'apparition de la première boule numérotée 1.
Proposer un modèle probabiliste pour lequel X et Y sont des variables aléatoires. Quelles sont les valeurs possibles pour X et pour Y ? Déduire les lois de X et de Y du modèle choisi.

61. Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs, en appliquant la règle suivante : si la boule tirée porte le numéro k, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur à k avant de procéder au tirage suivant.
On notera N_n, le numéro de la première boule tirée et X_n, le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n.

61.1 Pour $n_0 \geqslant 2$, on modélise l'expérience précédente par des variables aléatoires $(N_n)_{1\leqslant n\leqslant n_0}$ et $(X_n)_{1\leqslant n\leqslant n_0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ et telles que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n \leqslant n_0, \qquad \mathbf{P}(N_n = k) = 1/n$$
$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant n_0, \qquad \mathbf{P}(1 \leqslant X_n \leqslant n) = 1$$

et que, pour $2 \leqslant k \leqslant i \leqslant n \leqslant n_0$,

$$\mathbf{P}(X_n = k \mid N_1 = i) = \mathbf{P}(X_{i-1} = k - 1).$$

Justifier le bien-fondé de ce modèle.

61.2

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n \leqslant n_0, \quad \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} \mathbf{P}(X_i = k - 1)$$

61.3 Comme $[X_i = 1] = [N_i^1 = 1]$,

$$\mathbf{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

61.4 Comme

$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant n_0, \quad \mathbf{P}(X_n = n) = 1/n!,$$

alors la suite de terme général

$$v_n = n!\,\mathbf{P}(X_n = n - 1)$$

vérifie $v_{n+1} = v_n + n$ pour tout $n \geqslant 2$ et

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbf{P}(X_n = n - 1) = \frac{1}{2(n-2)!}.$$

61.5 Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{E}(X_i) + 1 = \mathbf{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

62. Records
Soit n, un entier supérieur à 3. D'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire successivement et sans remise les n boules, en notant X_k, le numéro de la k-ième boule tirée (pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$).
On dit que le tirage $(X_1, \dots, X_n)$ présente un ***record*** au rang $1 \leqslant k \leqslant n$ lorsque

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant k, \quad X_i \leqslant X_k.$$

En particulier, tout tirage présente un record au rang 1. On note enfin R_n, le nombre de records présents dans un tirage.

62.1 On modélise cette expérience aléatoire par la loi uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $E_n = \{1, \dots, n\}$.
Pour ce modèle, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi uniforme sur E_n et ces variables ne sont pas indépendantes.

62.2 Le nombre R_n de records est compris entre 1 et n et

$$[R_n = 1] = [X_1 = n]$$
$$[R_n = n] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \cdots \cap [X_n = n].$$

D'après le modèle adopté, les probabilités de ces deux évènements sont respectivement égales à $1/n$ et $1/n!$.

62.3 L'évènement $[R_n = 2]$ est l'union pour $2 \leqslant i \leqslant n$ des évènements

$$[X_1 > X_2, \dots, X_{i-1}] \cap [X_1 < X_i] \cap [X_{i+1}, \dots, X_i < X_i].$$

La probabilité de cet évènement est équivalente à $\ell n\, n/n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

62.4 Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $T_i = 1$ si le tirage présente un record au rang i et $T_i = 0$ dans le cas contraire.

1. Comme $[T_i = 1] = [X_1 < X_i, \dots, X_{i-1} < X_i]$, la fonction T_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/i$.
2. Soient $2 \leqslant i < j \leqslant n$. Comme
$$\mathbf{P}([T_i = 1] \cap [T_j = 1]) = 1/ij,$$
les variables T_i et T_j sont indépendantes.
3. Comme $R_n = T_1 + \cdots + T_n$, on peut en déduire un équivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ et de $\mathbf{V}(R_n)$ quand n tend vers l'infini.

62.5 Pour tout $\varepsilon > 0$, démontrer que

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{R_n}{\ell n\, n} - 1\Big| \geqslant \varepsilon\Big)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

III.2 Modèle du jeu de Pile ou Face

63. Une partie finie de Pile ou Face est modélisée par un échantillon i.i.d. de variables de Bernoulli : chaque lancer amène l'un des deux résultats possibles et les lancers s'effectuent tous dans les mêmes conditions. →[55]

64. Cas d'une partie infinie
L'existence d'un modèle probabiliste pour une partie *infinie* de Pile ou Face est un résultat difficile [89.2], puisqu'il s'agit de prouver l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ où l'ensemble Ω n'est pas dénombrable et où la tribu $\mathfrak{A}$ n'est pas discrète ($\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{P}(\Omega)$).

65. ➙ *Il existe un ensemble Ω, une tribu $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble Ω, une mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur la tribu $\mathfrak{A}$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathfrak{A})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$, indépendantes et de même loi : la loi de Bernoulli de paramètre p.*

Nombre de succès

66. Le modèle **[65]** décrit une expérience aléatoire conduite de manière répétitive, dans des conditions identiques. On considère alors l'évènement $[X_n = 1]$ comme un succès lors de la n-ième réalisation.
Le nombre de succès en n tentatives est alors modélisé par la variable aléatoire
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

66.1 Le nombre S_n de succès en n tentatives effectuées dans des conditions identiques suit la loi binomiale de paramètres (n, p), où p est la probabilité de succès à chacune des tentatives :
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathsf{P}(X_k = 1) = p.$$

66.2 Lorsque le nombre n de tentatives est grand et que la probabilité p de succès est petite, la ***loi des évènements rares*** [**12.22.2**] suggère de modéliser le nombre de succès par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

67. Taux de rebut
On suppose que 30% de la production d'une usine est de qualité insuffisante. On sélectionne un petit échantillon de n objets dans l'ensemble de la production.

67.1 Proposer une modélisation probabiliste de la proportion Q_n d'objets défectueux au sein de l'échantillon choisi.

67.2 On cherche une valeur de n assez grande pour que
$$\mathsf{P}(20\% \leqslant Q_n \leqslant 40\%) \geqslant 75\%.$$
Proposer une valeur convenable de n d'une part en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'autre part en utilisant la fonction `binom.cdf` du module `scipy.stats`.

Temps d'attente du premier succès

68. Dans le modèle **[65]**, le premier succès apparaît à l'issue de la n-ième réalisation lorsque l'évènement
$$[X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 1]$$
est réalisé.

68.1 L'évènement
$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [X_n = 0]$$
est négligeable.

68.2 On définit la fonction $T : \Omega \to \mathbb{N}$ en posant
$$\forall\, \omega \in N^c, \quad T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n(\omega) = 1\}$$
et $T(\omega) = 0$ pour $\omega \in N$.

68.3 La fonction T est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ qui suit la loi géométrique de paramètre p.

68.4 La loi géométrique de paramètre p doit ainsi être comprise comme le modèle usuel de temps d'attente d'un premier succès lorsque chaque tentative peut être réussie avec une probabilité p. L'***absence de mémoire*** [**12.21.4**] de la loi géométrique est une propriété remarquable de ce modèle.

69. Temps d'attente du N-ième succès
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$.

69.1 Pour tout $n \geqslant 1$, la loi de la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est caractérisée par
$$\forall\, k \geqslant n, \quad \mathsf{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$
et son espérance est égale à n/p.

69.2 On choisit $N \in \mathbb{N}^*$. On note T_N, le plus petit entier naturel n tel que $S_n > N$:
$$\forall\, 1 \leqslant n \leqslant N+1, \quad [T_N = n] = [S_{n-1} \leqslant N < S_n].$$
La fonction T_N est une variable aléatoire dont on identifie la loi en remarquant que
$$[T_N = n] = \bigsqcup_{k=n-1}^{N} \big([S_{n-1} = k] \cap [X_n > N - k]\big).$$
Que dire de $T_N - 1$? →**[91]**

69.3 On suppose maintenant que N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. La fonction $T_N : \Omega \to \mathbb{N}$ définie par
$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad T_N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) > N(\omega)\}$$
est une variable aléatoire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$[T_N = n] = \bigsqcup_{p \geqslant n-1} \left(\bigsqcup_{k=n-1}^{p} [S_{n-1} = k] \cap [X_n > p - k] \cap [N = p] \right).$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant N+1$,
$$\mathsf{P}_{[N=n]}(T_N = k) = \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-(k-1)}$$
donc $(T-1)$ suit la loi de Poisson de paramètre λp.

70. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$. On envoie un rayon laser dans cette enceinte à chaque seconde, le premier rayon étant envoyé à l'instant $t = 1$. On note $0 < p < 1$, la probabilité que la bactérie soit touchée par le rayon laser. La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée $r \in \mathbb{N}^*$ fois par le rayon laser. On note X, la durée de vie aléatoire de la bactérie. Proposer un modèle probabiliste qui permette de déterminer la loi de X.

71. Apparition de deux succès consécutifs
Soit $(B_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$ et
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad C_n = B_{n-1} + B_n.$$

71.1 Les variables aléatoires $(C_n)_{n\geqslant 2}$ ne sont pas indépendantes.

71.2 Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$A(\omega) = \{n \geqslant 2 : C_n = 2\}.$$
Si $A(\omega) = \varnothing$, on pose $X(\omega) = 0$ et dans le cas contraire, on pose $X(\omega) = \min A(\omega)$ et $u_n = \mathsf{P}(X = n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

1. La fonction X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ et l'évènement $[X = 0]$ est négligeable.
2. Si on pose
$$E = [C_4 \leqslant 1, \dots, C_{n+1} \leqslant 1, C_{n+2} = 2],$$
alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$[X = n+2] \cap [B_1 = 0] = [B_1 = 0] \cap [C_3 \leqslant 1] \cap E$$
$$[X = n+2] \cap [B_1 = 1] = [B_1 = 1] \cap [B_2 = 0] \cap E$$
donc
$$u_2 = p^2, \quad u_3 = p^2 q \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = q u_{n+1} + pq u_n.$$

3. La somme

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n$$

est définie sur $[-1,1]$ au moins, donc les racines de l'équation

$$x^2 - qx - pq = 0$$

vérifient $-1 \leqslant r_1 < 0 < r_2 \leqslant 1$ et

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad (1 - qx - pqx^2)S(x) = p^2x^2.$$

4. L'espérance de X est égale à $(p+1)/p^2$.
5. La probabilité pour que X soit paire est égale à

$$\frac{1-pq}{1+q^2}$$

et donc strictement supérieure à $1/2$.

72. Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour contrôler leur qualité, on effectue des prélèvements aléatoires. On cherche à évaluer le nombre de pièces défectueuses produites avant qu'une pièce défectueuse soit détectée lors du contrôle.

72.1 Un modèle

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ globalement indépendantes et qui suivent toutes une loi de Bernoulli :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y_n = 1) = p'.$$

L'évènement $[X_n = 1]$ modélise le fait que la n-ième pièce produite soit défectueuse et l'évènement $[Y_n = 1]$ modélise le fait que la qualité de la n-ième pièce produite soit contrôlée.

72.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $Z_n = X_nY_n$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre pp'. L'évènement $[Z_n = 1]$ modélise le fait que la n-ième pièce produite soit défectueuse et contrôlée.

72.3 La famille $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $n \geqslant 1$, les variables aléatoires X_n et Z_n sont corrélées.

72.4 On modélise par l'évènement A_n le fait que la n-ième pièce produite soit la première pièce défectueuse et contrôlée :

$$A_n = [Z_1 = 0] \cap \cdots \cap [Z_{n-1} = 0] \cap [Z_n = 1] \in \mathfrak{A}$$

et on pose $B_n = [Z_n = 0] \in \mathfrak{A}$.

1. Presque sûrement, on va détecter une pièce défectueuse :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1.$$

2. Quels que soient $1 \leqslant k < n$,

$$\mathbf{P}_{A_n}(X_k = 1) = \mathbf{P}_{B_k}(X_k = 1) = \frac{p(1-p')}{1-pp'}.$$

3. Conditionnellement à l'évènement A_n, les variables aléatoires X_1, ..., X_{n-1} sont indépendantes : pour toute famille $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i<n}$ de nombres égaux à 0 ou à 1,

$$\mathbf{P}_{A_n}\Big(\bigcap_{1\leqslant i<n} [X_i = \varepsilon_i]\Big) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}_{A_n}(X_i = \varepsilon_i).$$

4. Le nombre de pièces défectueuses parmi les $(n-1)$ premières pièces produites est égal à

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

La loi conditionnelle de S_n sachant A_n est une loi binomiale et son espérance conditionnelle est égale à

$$\mathbf{E}(S_n|A_n) = (n-1)\frac{p(1-p')}{1-pp'}.$$

5. Avant qu'une pièce défectueuse soit détectée, le nombre moyen de pièces défectueuses produites est égal à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(S_n|A_n)\,\mathbf{P}(A_n).$$

III.3 Marches aléatoires et propriété de Markov

73. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace discret E.

73.1 La formule des probabilités composées [**16.8**] permet de calculer la probabilité d'observer l'évènement

$$[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n].$$

73.2 On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la ***propriété de Markov homogène*** lorsqu'il existe une famille réelle

$$P = (p_{x,y})_{(x,y)\in E\times E}$$

telle que :

— pour tout $x \in E$, la sous-famille

$$(p_{x,y})_{y\in E}$$

soit une loi de probabilité discrète sur E

— et que, quels que soient $x_0, \ldots, x_n$ dans E, la probabilité

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

soit égale à

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0)p_{x_0,x_1}p_{x_1,x_2}\cdots p_{x_{n-1},x_n}.$$

73.3 Avec $n = 1$, on comprend que la famille P décrit la loi conditionnelle de X_1 sachant X_0 : quels que soient les états x_0 et x_1 dans E,

$$p_{x_0,x_1} = \mathbf{P}(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0)$$

(en admettant que cette probabilité conditionnelle ait un sens).

73.4 En confrontant l'hypothèse de Markov à la formule des probabilités composées, on comprend que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)&\\ = \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)&\end{aligned}$$

ce qu'on traduit par le fait que la loi de X_{n+1} (le futur) dépend de la valeur de X_n (le présent) mais pas des valeurs de X_0, ..., X_{n-1} (le passé). →[**11.41**],[**11.53**]

73.5 On dit que cette propriété de Markov est *homogène* (dans le temps) parce qu'elle se traduit aussi par le fait que

$$\forall\, x, y \in E, \qquad p_{x,y} = \mathbf{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$$

(en admettant que cette probabilité conditionnelle ait un sens).

73.6 L'homogénéité dans le temps de la propriété de Markov se traduit également par le fait que la probabilité conditionnelle

$$\mathbf{P}(X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_k \mid X_n = x_0)$$

est égale à

$$p_{x_0,x_1}\cdots p_{x_{k-1},x_k}$$

c'est-à-dire à la probabilité conditionnelle

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k \mid X_0 = x_0)$$

(en admettant que ces probabilités conditionnelles aient un sens).

74. On appelle ***marche aléatoire sur*** E une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans E, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ qui possède la propriété de Markov homogène.

Aspects matriciels

75. On suppose ici que l'espace d'états E est un ensemble fini et plus précisément qu'il s'agit d'une partie finie de $\mathbb{N}$.

$$E = \{1, \dots, N\}$$

75.1 La propriété de Markov homogène se traduit par la donnée d'une matrice $P \in \mathfrak{M}_N(\mathbb{R})$, dite ***matrice de transition***.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant N, \quad P_{i,j} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

75.2 La loi de chaque variable aléatoire X_n est représentée par une matrice ligne :

$$\mu_n = \big(\mathbf{P}(X_n = i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant N} \in \mathfrak{M}_{1,N}(\mathbb{R})$$

où les coefficients sont des réels positifs dont la somme est égale à 1.

75.3 La formule des probabilités totales [**73.5**] donne la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mu_{n+1} = \mu_n P.$$

Le calcul des puissances de P décrit donc la loi de X_n (en fonction de la loi de X_0) et l'étude de la matrice colonne μ_n lorsque n tend vers $+\infty$ décrit la ***distribution asymptotique*** de X_n, c'est-à-dire les fréquences des valeurs prises par X_n en régime permanent.

76. Étude spectrale de la matrice de transition

76.1 Comme la somme des coefficients de chaque ligne de P est égale à 1, la matrice P admet 1 pour valeur propre.

76.2 Si λ est une valeur propre complexe de P, alors $|\lambda| \leqslant 1$ (tous les coefficients de P sont positifs).

Exemples

77. Des goûts et des couleurs...

Un mathématicien esthète repeint sa chambre tous les 14 mars : il n'aime que le gris taupe, le vert anis et le bleu lagon. En prenant possession de son appartement ($n = 0$), il peint sa chambre en gris taupe et décide de changer de couleur chaque année.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n, B_n et C_n, les évènements *la chambre est gris taupe (resp. vert anis, resp. bleu lagon) lors de l'année n* et on note

$$a_n = \mathbf{P}(A_n), \qquad b_n = \mathbf{P}(B_n), \qquad c_n = \mathbf{P}(C_n).$$

77.1 Proposer un modèle probabiliste qui permette d'exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

77.2 La matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable. Elle admet 1 et $-1/2$ pour valeurs propres.

77.3 Étudier le comportement de a_n, b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

78. Quitte ou double

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ et que, pour un réel $0 < p < 1$ fixé,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p$$
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = k) = (1-p)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

78.1 Quels que soient les entiers ℓ, m et n, si $m \notin \{0, \ell+1\}$, alors

$$\mathbf{P}(X_n = \ell, X_{n+1} = m) = 0.$$

Il existe donc un évènement presque sûr Ω_0 tel que

$$\forall\, \omega \in \Omega_0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1}(\omega) \in \big\{0, X_n(\omega) + 1\big\}.$$

78.2 On a

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = 0, X_{n-1} = k) = 1 - p$$

et $\mathbf{P}(0 \leqslant X_n \leqslant n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

78.3 En notant f_n, la fonction génératrice de X_n, on a

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0,1], \quad f_{n+1}(t) = pt f_n(t) + (1-p),$$

donc

$$f_n(t) = (pt)^n + (1-p)\frac{(pt)^n - 1}{pt - 1}$$

et enfin

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{E}(X_n) = \frac{1-p^n}{1-p}p.$$

78.4 Instant du premier retour

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note

$$A(\omega) = \big\{n \in \mathbb{N}^* \ :\ X_n(\omega) = 0\big\} \subset \mathbb{N}^*.$$

Si $A(\omega) = \varnothing$, on pose $T(\omega) = 0$ et dans le cas contraire, on pose $T(\omega) = \min A(\omega)$.

La fonction T est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[T = n] = [X_1 = 1] \cap \dots \cap [X_{n-1} = n-1] \cap [X_n = 0],$$
$$[T > n] \subset [X_n = n]$$

et $\mathbf{P}(T = 0) = 0$.

79. Marche aléatoire avec barrières absorbantes

On modélise le mouvement aléatoire d'une particule sur un axe fini par une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

79.1 On suppose que la particule occupe initialement la position $0 \leqslant k \leqslant N$:

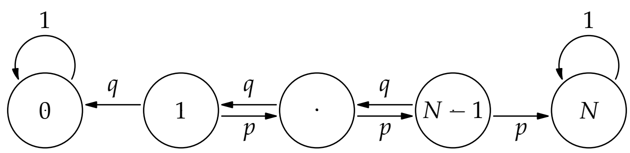
$$\mathbf{P}(X_0 = k) = 1$$

et qu'à chaque unité de temps, elle peut se déplacer d'une unité d'espace vers la gauche ou vers la droite : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, 1 \leqslant k < N, \quad \mathbf{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = 1 - p = q,$$
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p.$$

On suppose enfin que des barrières absorbantes sont placées en 0 et en N : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = N \mid X_n = N) = \mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1.$$



79.2 On s'intéresse à la probabilité de l'évènement

$$R_0 = \bigcup_{n \geqslant 1} [X_n = 0],$$

qui signifie que la particule atteint la position 0 (et y reste définitivement), en fonction de la position initiale k. On pose :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant N, \quad q_k = \mathbf{P}(R_0 \mid X_0 = k).$$

En particulier, $q_0 = 1$ et $q_N = 0$.

1. D'après la propriété de Markov,

$$\mathbf{P}(R_0 \mid X_1 = k+1) = q_{k+1}, \quad \mathbf{P}(R_0 \mid X_1 = k-1) = q_{k-1}$$

et

$$\begin{aligned} q_k &= \mathbf{P}(R_0 \mid X_1 = k+1)\,\mathbf{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) \\ &\quad + \mathbf{P}(R_0 \mid X_1 = k-1)\,\mathbf{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k). \end{aligned}$$

2. Les réels q_k vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$q_k = pq_{k+1} + qq_{k-1}$$

pour tout entier $1 \leqslant k < N$.

3. Si $p \neq q$, alors

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant N, \quad q_k = \frac{(q/p)^N - (q/p)^k}{(q/p)^N - 1}.$$

Si $p = q = 1/2$, alors

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant N, \quad q_k = 1 - k/N.$$

79.3 Pour $0 \leqslant k \leqslant N$, on note p_k, la probabilité conditionnelle de

$$V_n = \bigcup_{n \geqslant 1} [X_n = N]$$

sachant $[X_0 = k]$, c'est-à-dire la probabilité pour que la particule partie de la position k achève sa marche aléatoire en atteignant la position N.
Une étude analogue montre que $p_k + q_k = 1$ pour tout k, ce qui signifie que, quel que soit son point de départ, la particule atteint presque sûrement l'une des deux barrières absorbantes.

III.4 Processus de Lévy

80. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ et indépendantes.

80.1 Le processus $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, défini par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

est un ***processus à accroissements indépendants*** au sens où le vecteur aléatoire

$$(S_{m_1}, S_{m_2} - S_{m_1}, S_{m_3} - S_{m_2}, \ldots, S_{m_p} - S_{m_{p-1}})$$

est une famille de variables aléatoires indépendantes, quels que soient les entiers $p \geqslant 1$ et

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_p.$$

80.2 Quels que soient les entiers n et p, quelle que soit la fonction f, l'accroissement $S_{n+p} - S_n$ est indépendant de la variable aléatoire $f(S_0, \ldots, S_n)$.

80.3 On dit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un ***processus à accroissements indépendants stationnaire*** lorsque les variables X_1 et X_n sont de même loi pour tout $n \geqslant 2$.

81. Propriété de Markov
Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus à accroissements indépendants stationnaire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors il possède la propriété de Markov homogène avec

$$\begin{aligned} \forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \quad p_{x,y} &= \mathbf{P}(S_{n+1} = y \mid S_n = x) \\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = y - x) = \mathbf{P}(X_1 = y - x). \end{aligned}$$

Propriété de martingale

82. Une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est une ***martingale*** lorsque

$$\mathbf{E}\big(Y_{n+1} f(Y_0, \ldots, Y_n)\big) = \mathbf{E}\big(Y_n f(Y_0, \ldots, Y_n)\big)$$

pour tout indice $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction bornée f.

83. Si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, alors $\mathbf{E}(Y_n)$ est indépendante de n.

84. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la marche aléatoire associée aux X_n :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k.$$

On suppose que les variables X_n sont d'espérance finie.

84.1 Le processus aléatoire $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M_n = S_n - \mathbf{E}(S_n) = S_n - (n+1)\,\mathbf{E}(X_0)$$

est un processus à accroissements indépendants qui possède la propriété de martingale.

84.2 Si les variables X_n admettent un moment d'ordre deux, alors le processus aléatoire défini par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Q_n = M_n^2 - \mathbf{E}(M_n^2)$$

est une martingale.

84.3 Si $e^{\lambda X_0}$ est une variable d'espérance finie, alors le processus aléatoire défini par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{e^{\lambda M_n}}{\mathbf{E}(e^{\lambda M_n})}$$

est une martingale.

Exemples

85. Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(U_n = 1) = \mathbf{P}(U_n = -1) = 1/2.$$

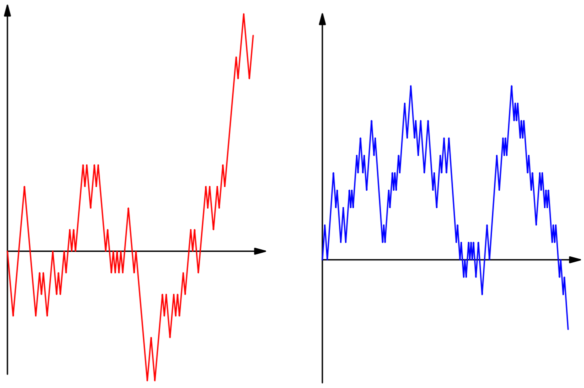
On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = U_1 + \cdots + U_n.$$

D'après le théorème de Donsker, le processus aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini à partir de

$$\forall\, (\omega, n) \in \Omega \times \mathbb{N}, \quad X_{n\delta}(\omega) = \sqrt{\delta} \cdot S_n(\omega)$$

par interpolation linéaire converge (en un certain sens...) vers le ***mouvement brownien*** lorsque δ tend vers 0.



86. Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisté $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $S_0 = 0$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modélise la marche aléatoire d'un pion sur $\mathbb{N}$.

86.1 On suppose ici que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$.

1. Proposer une simulation informatique de cette expérience. En déduire une fonction du paramètre p et d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ qui retourne 1 si le pion passe par l'entier k et 0 si le pion dépasse cette valeur sans la prendre.

2. Pour de grandes valeurs de k (et des valeurs quelconques de p), comparer la proportion de tentatives pour lesquelles le pion passe par l'entier k et $1/\,\mathbf{E}(Y_1)$.

86.2 Pour tout entier k, on note u_k, la probabilité pour que le pion passe par l'entier k lors de son parcours, c'est-à-dire la probabilité de l'évènement

$$E_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n = k].$$

Pour $t \in\,]-1, 1[$, on pose

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_1 = n)t^n \quad \text{et} \quad u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)t^n.$$

3. La fonction u est bien définie sur $]-1, 1[$.

4. Pour $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$\mathbf{P}(E_k \cap [Y_1 = j]) = \mathbf{P}(Y_1 = j)u_{k-j}$$

donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad u_k = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}(Y_1 = j)u_{k-j}$$

et

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[\,, \quad u(t) = \frac{1}{1 - f(t)}.$$

5.a Si Y_1 suit la loi géométrique de paramètre p, alors $u_k = p$ pour $k \geqslant 1$.

5.b Si $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{1 - (-p)^{k+1}}{1 + p}.$$

5.c Dans ces deux cas, la probabilité u_k tend vers $1/\,\mathbf{E}(Y_1)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

IV

Théorème de Kolmogorov

87. Le théorème de Kolmogorov démontre que chaque modèle probabiliste usuel existe : tout ce qui précède a bien un sens !

88. **Existence d'un échantillon i.i.d.**
Considérons une famille finie de mesures de probabilités μ_1, …, μ_n sur un espace mesurable discret $(E, \mathcal{E})$.

88.1 L'ensemble

$$\Omega = E \times \cdots \times E = E^n$$

est au plus dénombrable et muni de sa tribu discrète $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

88.2 Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, on pose

$$p_x = \mu_1(\{x_1\}) \times \cdots \times \mu_n(\{x_n\}).$$

La famille $(p_x)_{x\in\Omega}$ est une loi de probabilité discrète sur Ω : il existe donc [**11**.60.3] une mesure de probabilité discrète $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que

$$\forall\, x \in \Omega, \quad \mathbf{P}(\{x\}) = p_x.$$

88.3 Pour tout $\omega = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$X_k(\omega) = x_k.$$

Les applications X_1, …, X_n sont des variables aléatoires sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{A})$. Ces variables sont indépendantes et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la loi de X_k est μ_k :

$$\forall\, A_k \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{P}(X_k \in A_k) = \mu_k(A_k).$$

89. Nous admettons maintenant un théorème considérablement plus fort, qui affirme la possibilité de modéliser mathématiquement la *répétition à l'infini* d'une expérience aléatoire sans modifier les conditions de cette expérience. →[**64**]

89.1 ➞ **Théorème fondamental**
Si μ_n est une mesure de probabilité sur $(E_n, \mathcal{E}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, A_n \in \mathcal{E}_n, \quad \mathbf{P}(X_n \in A_n) = \mu_n(A_n).$$

89.2 En particulier, pour toute mesure de probabilité μ sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ qui sont indépendantes et de loi μ.

90. La version suivante du théorème fondamental assure l'existence d'une marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace d'états dénombrable E, quelles que soient la loi de X_0 et la matrice de transition $P = (p_{x,y})_{(x,y)\in E\times E}$. →[**73.2**]

90.1 ➞ *Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'ensembles finis ou dénombrables. On suppose connues*

- *une mesure de probabilité discrète $\mu^{(0)}$ sur E_0 et*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E_n$, une mesure de probabilité discrète $\mu_x^{(n+1)}$ sur E_{n+1}.*

Alors il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ telles que

$$\forall\, x \in E_0, \quad \mathbf{P}(X_0 = x) = \mu^{(0)}(\{x\})$$

et que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) \\ = \mu_{x_n}^{(n+1)}(\{x_{n+1}\})\,\mathbf{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)\end{aligned}$$

quels que soient $x_0 \in E_0$, …, $x_n \in E_n$ et $x_{n+1} \in E_{n+1}$.

90.2 En particulier, lorsque $E_n = E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mu_x(n) = \mu_x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème [**90.1**] affirme l'existence d'une chaîne de Markov homogène dont la transition est modélisée par la famille des mesures μ_x.

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

91. **Formule du triangle de Pascal**
Quels que soient les entiers $0 \leqslant n \leqslant N$,

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$

Proposer une interprétation combinatoire de cette identité.

92. *Suite de* [**46**] – Soit $\varepsilon > 0$.

0.a Il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\frac{u_m}{m} \geqslant \gamma_a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

0.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue la division euclidienne de n par m :
$$n = q_n m + r_n.$$
Alors
$$u_n \geqslant q_n u_m + u_{r_n}$$
et il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \qquad \gamma_a \geqslant \frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \gamma_a - \varepsilon.$$

93. On dispose de trois pièces indiscernables P_1, P_2 et P_3, subtilement truquées pour qu'elles donnent Face avec probabilité $0,2$, $0,5$ et $0,8$ respectivement. On choisit deux de ces pièces et on les lance.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois Face ?
3. Sachant qu'on a obtenu deux fois Face, quelle est la probabilité d'avoir choisi les pièces P_2 et P_3 ? d'avoir choisi les pièces P_1 et P_3 ?
4. Imaginer une méthode pour distinguer les trois pièces.

94. Soit $n \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, on pose
$$a_{i,j} = 2^{-2n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$
et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

94.1 Il existe deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que
$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n+1, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a_{i,j}.$$
Ces variables aléatoires sont indépendantes et de même loi.

94.2 *Suite de* [**28.3**] – La somme $X + Y - 2$ suit la loi binomiale de paramètres $(2n, 1/2)$.

94.3 *Suite de* [**28.4**] – Comme $A^2 = 2^{-2n}\binom{2n}{n} A$, la matrice A est diagonalisable.

95. Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suivent la loi géométrique de paramètre $0 < p = 1 - q < 1$. On pose
$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big),$$
ainsi que
$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad J(\omega) = \begin{vmatrix} 1 \text{ si } X_1(\omega) < X_2(\omega), \\ 2 \text{ si } X_2(\omega) < X_1(\omega), \\ 0 \text{ si } X_1(\omega) = X_2(\omega). \end{vmatrix}$$

95.1 En posant $H = (X_1 \neq X_2)$,
$$\frac{1}{2}\,\mathbf{P}(H) = \mathbf{P}(X_1 < X_2) = \mathbf{P}(X_2 < X_1) = \frac{q}{1+q}.$$

95.2 Les variables aléatoires X et J sont indépendantes.

95.3 On s'intéresse à la loi conditionnelle du couple (X, J) sachant H. Comme $\mathbf{P}_H(J = 1) = 1/2$ et que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}_H(J = 1, X > k) = \mathbf{P}_H(J = 2, X > k) = q^{2k},$$
alors les variables aléatoires X et J sont indépendantes pour la mesure $\mathbf{P}_H$.

96. On considère deux familles de variables aléatoires indépendantes $(X_r)_{1 \leqslant r \leqslant n}$ et $(Y_r)_{1 \leqslant r \leqslant n}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Pour tout entier $1 \leqslant r \leqslant n$, on suppose que X_r suit la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p_r < 1$ et que le support de la loi de Y_r est égal à $\mathbb{N}$. Enfin, on suppose que, pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$,
$$\mathbf{P}(X_r = 0, Y_r = 0) = 1 - p_r,$$
$$\mathbf{P}(X_r = 1, Y_r = 0) = e^{-p_r} - 1 + p_r,$$
$$\forall\, y \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_r = 1, Y_r = y) = \frac{p_r^y}{y!} e^{-p_r}.$$

96.1 La variable aléatoire Y_r suit la loi de Poisson de paramètre p_r.

96.2 On cherche à comparer les deux sommes
$$S = X_1 + \cdots + X_r \quad \text{et} \quad Z = Y_1 + \cdots + Y_r.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} &\big|\,\mathbf{P}(S = k) - \mathbf{P}(Z = k)\big| \\ &\qquad = \big|\,\mathbf{P}(S = k, Z \neq k) - \mathbf{P}(S \neq k, Z = k)\big| \\ &\qquad \leqslant \mathbf{P}(S = k, S \neq Z) + \mathbf{P}(Z = k, S \neq Z). \end{aligned}$$

2. La série $\sum \big|\,\mathbf{P}(S = k) - \mathbf{P}(Z = k)\big|$ est convergente et que sa somme est inférieure à $2\,\mathbf{P}(S \neq Z)$.

3.
$$\mathbf{P}(S \neq Z) \leqslant \mathbf{P}\Big(\bigcup_{1 \leqslant r \leqslant n} [X_r \neq Y_r]\Big) \leqslant \sum_{r=1}^{n} p_r^2$$

4. Si U est une variable aléatoire aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $p_1 + \cdots + p_n$, alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big|\,\mathbf{P}(S = k) - \mathbf{P}(U = k)\big| \leqslant 2 \sum_{r=1}^{n} p_r^2.$$

96.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n, une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale de paramètres n et λ/n. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi [**103**] vers la loi de Poisson de paramètre λ.

97. Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètre λ.

97.1 En admettant [**4.41**] que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},$$
on obtient
$$\mathbf{P}(X = Y) = \frac{e^{-2\lambda}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-2\lambda t}}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t.$$

97.2 On cherche un équivalent de la fonction de Bessel
$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$$
lorsque x tend vers $+\infty$.

1.
$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$$

2.a Par convexité,
$$\forall\, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leqslant 1 + y.$$

2.b Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [**7.35.3**],
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t &= \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-\theta x}}{\sqrt{\theta(1-\theta/2)}} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^x + \mathcal{O}\Big(\frac{e^x}{x\sqrt{x}}\Big) \end{aligned}$$

et donc

$$I(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

lorsque x tend vers $+\infty$

98. Problème des partis

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ (on pose $q = 1 - p$).

98.1 Ces variables modélisent une partie de Pile ou Face et on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où est apparu Pile au cours des n premiers lancers.

Étant donnés deux entiers m et n, on étudie la possibilité qu'il apparaisse m fois Pile avant que Face soit apparu n fois, c'est-à-dire l'évènement

$$A_{m,n} = [S_{m+n-1} \geqslant m].$$

98.2 La variable aléatoire $X_2 + \cdots + X_{m+n-1}$ est indépendante de X_1 et suit la loi de S_{m+n-2}, donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{m+n-1} \geqslant m) = \mathbf{P}(S_{m+n-2} \geqslant m-1)\,\mathbf{P}(X_1 = 1)\\ + \mathbf{P}(S_{m+n-2} \geqslant m)\,\mathbf{P}(X_1 = 0).\end{aligned}$$

98.3 En notant $p_{m,n} = \mathbf{P}(A_{m,n})$, la famille

$$(p_{m,n}x^m y^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$$

est sommable pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On notera :

$$G(x,y) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{N}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} p_{m,n}x^m y^n.$$

98.4 Quels que soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$,

$$p_{m,0} = 0, \qquad p_{0,n} = 1,$$
$$\forall\, m,n \geqslant 1, \qquad p_{m,n} = p_{m-1,n}p + p_{m,n-1}q.$$

98.5 Pour $|x| < 1$ et $|y| < 1$,

1.
$$G(x,y) - \sum_{n=1}^{+\infty} y^n = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} p_{m,n}x^m y^n$$

2.
$$G(x,y) - \frac{y}{1-y} = (px+qy)G(x,y) - qy\frac{y}{1-y}$$

3.
$$G(x,y) = \frac{y(1-qy)}{(1-y)(1-px-qy)}$$

98.6 Quels que soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_{m+n-1} \geqslant m) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+m-1}{m-1} p^m q^k.$$

On peut donner une signification combinatoire à cette expression en interprétant le paramètre k comme l'instant auquel apparaît Pile pour la m-ième fois.

99. On dit qu'une variable aléatoire réelle X est **symétrique** lorsque X et $-X$ suivent la même loi.

99.1 Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors $Y_1 - Y_2$ est symétrique.

99.2 Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}).$$

1. La fonction f_X caractérise la loi de X.
2. Condition nécessaire et suffisante sur f_X pour que X soit symétrique.

100.1 Proposer une simulation informatique, fonction des paramètres n et p, de la variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Comparer la ligne brisée interpolant les points (k, S_k), l'entier k variant de 1 à n, aux graphes des fonctions f et g définies par

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad f(t) = p + \sqrt{\frac{\ell n\, t}{t}} \quad \text{et} \quad g(t) = p - \sqrt{\frac{\ell n\, t}{t}}.$$

100.2 Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t.$$

2. Si X est centrée et si $\mathbf{P}(|X| \leqslant 1) = 1$, alors $\exp(tX)$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}[\exp(tX)] \leqslant \operatorname{ch} t \leqslant \exp\frac{t^2}{2}.$$

100.3 Soient $X_1, \ldots, X_n$, des variables aléatoires centrées indépendantes, telles que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \forall\, \omega \in \Omega, \quad |X_i(\omega)| \leqslant a_i.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\big(\exp(tS_n)\big) \leqslant \exp\Big(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\Big).$$

4. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\Big(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\Big).$$

Par un choix convenable de $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\frac{-\varepsilon}{2(a_1^2 + \cdots + a_n^2)}.$$

Pour aller plus loin

101. Instants de succès dans le jeu de Pile ou Face

On reprend le modèle canonique **[65]** du jeu de Pile ou Face.

101.1 *Suite de* **[69]** – Il existe une suite $(N_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements négligeables tels que les instants de succès T_n, $n \geqslant 1$, soient tous définis sur le complémentaire de

$$N_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} N_n.$$

101.2 Conditionnellement à l'évènement N_0^c, la famille $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est un processus à accroissements indépendants stationnaires **[80]** dont les accroissements suivent la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ et, pour tout entier $N \geqslant 1$, la variable aléatoire

$$T_N = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_N - T_{N-1})$$

suit la loi décrite au **[69]**.

102. Espérance conditionnelle

Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que Y est une variable d'espérance finie.

1. Il existe une fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que $g(X)$ soit d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}\big[Yf(X)\big] = \mathbf{E}\big[g(X)f(X)\big]$$

pour toute fonction bornée $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

2. Cette fonction g est unique sur le support de la loi de X : si g_1 et g_2 sont deux fonctions qui vérifient la propriété précédente, alors

$$\mathbf{P}\big(g_1(X) = g_2(X)\big) = 1.$$

La variable aléatoire $g(X)$ ainsi définie est appelée ***espérance conditionnelle de*** Y ***sachant*** X.

103. Convergence en loi
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X, des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. On note G et G_n, les fonctions génératrices respectives de X et de X_n.

103.1 On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en loi*** vers X au sens où

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X = k).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A et un rang N_0 tels que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \qquad \mathbf{P}(X_n \leqslant A) \geqslant 1 - \varepsilon$$

et la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le disque unité fermé $\mathbb{D}$ vers G.

103.2 Si la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur le cercle unité $\mathbb{U}$ vers G, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_n(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

104. Reprendre l'étude du **[53]** sans supposer $H(0) = 0$: comment définir $S(\omega)$ lorsque $N(\omega) = 0$? cela modifie-t-il la fonction génératrice de S ?

105. Soient X et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

105.1 Convergence presque sûre
L'évènement

$$[U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X] = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\geqslant N} [|U_n - X| \leqslant \varepsilon] \in \mathfrak{A}$$

est presque sûr si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \lim_{N\to+\infty} \downarrow \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant N} [|U_n - X| > \varepsilon]\Big) = 0.$$

On dit dans ce cas que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge presque sûrement*** vers X.

105.2 Convergence en probabilité [12.96.1]
Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

105.3 Convergence en loi
On dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en loi*** vers X lorsque

$$\mathbf{P}(U_n \leqslant x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

1. Comparer avec **[103]**.
2. La convergence en probabilité implique la convergence en loi.
3. Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi de Dirac au point x_0, alors elle converge en probabilité vers X.

105.4 Suite de Rademacher
On considère $\Omega = [0, 1]$, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue et les variables de Dirac définies par

$$\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leqslant k < 2^q, \quad U_{2^q+k} = \mathbb{1}_{[k.2^{-q},(k+1).2^{-q}[}.$$

La suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui converge en probabilité vers la variable presque sûrement nulle, alors que la suite de terme général $U_n(\omega)$ est presque sûrement divergente.

106. Loi forte des grands nombres
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que ces variables sont centrées et admettent un moment d'ordre 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Comme

$$\mathbf{E}(S_n^4) = n\,\mathbf{E}(X_1^4) + 3n(n-1)[\mathbf{E}(X_1^2)]^2,$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}\big(|S_n| \geqslant n\varepsilon\big) \leqslant \frac{3}{n^2\varepsilon^4}.$$

Il existe **[11.23]** un évènement $\Omega_0 \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ et que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite $\big(S_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. →**[31.3]**