Involutions de $\mathbb{R}^3$

On cherche à créer des matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = I_3$. Ces matrices représentent des ***symétries*** *de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des* ***involutions*** *(applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$) linéaires.*
Dans un premier temps, on s'intéressera aux involutions isométriques : à deux exceptions près, ce sont des ***réflexions*** *(symétries orthogonales qui fixent un plan de $\mathbb{R}^3$) et des* ***demi-tours*** *(symétries orthogonales qui fixent une droite D de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire rotations d'angle π autour de cette droite).*
En général, les matrices d'isométries ne sont pas à coefficients entiers. C'est pour cette raison que, dans un second temps, nous nous intéresserons aux involutions représentées par une matrice à coefficients entiers.

Formes réduite des symétries de $\mathbb{R}^3$

[1.] On considère une symétrie $f \in L(\mathbb{R}^3)$, représentée par la matrice A dans la base canonique. Par définition,

$$(A^2 - I_3) = (A - I_3)(A + I_3) = (A + I_3)(A - I_3) = 0_3 \tag{1}$$

ce qui signifie que la symétrie admet le polynôme $(X-1)(X+1)$ pour polynôme annulateur.

[2.] Comme ce polynôme annulateur est scindé à racines simples, la symétrie est diagonalisable. On connaît donc une décomposition de $\mathbb{R}^3$ en somme directe :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - I) \oplus \mathrm{Ker}(f + I) \tag{2}$$

et les projections associées à cette décomposition s'expriment facilement :

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(I+f), \qquad \pi_{-1} = \frac{1}{2}(I-f). \tag{3}$$

On a donc

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \qquad \begin{cases} u = \pi_1(u) + \pi_{-1}(u) \\ f(u) = \pi_1(u) - \pi_{-1}(u) \\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^k(u) = \pi_1(u) + (-1)^k \pi_{-1}(u). \end{cases} \tag{4}$$

Les relations (3) nous disent en particulier que

$$\mathrm{Ker}(f + I) = \mathrm{Im}(f - I)$$

si bien que nous ne nous intéresserons qu'à l'endomorphisme $(f - I)$.

[3.] Traduisons matriciellement ce qui précède. La matrice A est diagonalisable, semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1.

En discutant sur la multiplicité de la valeur propre 1 (c'est-à-dire sur la dimension du sous-espace fixe par f), on arrive à la conclusion que la matrice A est semblable à l'une des quatre matrices suivantes.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'identité I_3 et la symétrie centrale $-I_3$ sont à peu près sans intérêt. En effet, toute matrice semblable à I_3 (resp. à $-I_3$) est égale à I_3 (resp. à $-I_3$).

Il est intéressant de remarquer que $D = -R$. Un simple changement de signe nous permet donc de passer de la symétrie fixant F et de direction G à la symétrie fixant G et de direction F.

Nous nous bornerons donc dans la suite au cas des symétries f fixant un plan, c'est-à-dire au cas où $\mathrm{rg}(f - I) = 1$.

[4.] On suppose ici que l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un *produit scalaire* et de la norme associée à ce produit scalaire.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, représenté par la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ relativement à une *base orthonormée* pour le produit scalaire considéré, en supposant que f n'est ni l'identité : $f \neq I$, ni la symétrie centrale : $f \neq -I$.

[5.] L'endomorphisme f est alors une **symétrie** : $f \circ f = I$ et une **isométrie**

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \qquad \big\|f(u)\big\| = \|u\|$$

si, et seulement si, la matrice A vérifie les deux relations $A^2 = I_3$ et $A^\top = A^{-1}$, c'est-à-dire si la matrice A est à la fois **symétrique** et **orthogonale**.

[6.] Dans ce cas, les sous-espaces propres $F = \mathrm{Ker}(f - I)$ et $G = \mathrm{Ker}(f + I)$ sont orthogonaux et plus précisément chacun est l'orthogonal de l'autre.

$$\mathbb{R}^3 = F \overset{\perp}{\oplus} G \qquad F^\perp = G \qquad G^\perp = F$$

La dimension du sous-espace fixe $F = \mathrm{Ker}(f - I)$ permet de caractériser géométriquement la symétrie f :

— Si $\dim F = 2$, alors f est la **réflexion** par rapport au plan F ;

— Si $\dim F = 1$, alors f est le **demi-tour** autour de la droite F.

Comme on l'a vu plus haut, la symétrie f est la réflexion par rapport au plan F si, et seulement si, la symétrie $-f$ est le demi-tour autour de la droite $G = F^\perp$.

[7.] Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ non nul, on sait que la *projection orthogonale* sur la droite $G = \mathbb{R} \cdot u$ est représentée matriciellement par

$$\frac{1}{U^\top.U} \cdot U.U^\top$$

où U est la colonne qui représente le vecteur u (dans la base orthonormée choisie).

Par conséquent, la **réflexion** qui fixe le plan $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ est représentée par la matrice

$$A = I_3 - \frac{2}{U^\top.U} \cdot U.U^\top$$

(dite *matrice de Householder*) et le **demi-tour** autour de la droite $\mathbb{R} \cdot u$ par la matrice

$$-A = \frac{2}{U^\top.U} \cdot U.U^\top - I_3.$$

On rappelle que le plan $(\mathbb{R} \cdot u)^\perp$ est représenté dans la base orthonormée considérée par l'équation cartésienne $[U^\top.X = 0]$.

[8.] En général, si le vecteur U est à coefficients *entiers*, la matrice A est à coefficients rationnels. Il est donc préférable de calculer séparément l'entier *non nul* $\alpha = U^\top.U$ et la matrice

$$H = \alpha \cdot I_3 - 2 \cdot U.U^\top \in \mathcal{S}_3(\mathbb{Z})$$

pour retrouver ensuite la matrice

$$A = \frac{1}{\alpha} \cdot H.$$

```
def reflexion(U):
    colonne = np.array(U).reshape(3, 1)
    ligne   = np.array(U).reshape(1, 3)
    projection = np.dot(colonne, ligne)
    alpha = np.dot(ligne, colonne)[0,0]
    H = alpha*np.eye(3) - 2*projection
    return H, alpha

def demi_tour(U):
    (H, alpha) = reflexion(U)
    return -H, alpha
```

[9.] On s'intéresse maintenant seulement aux involutions f de $\mathbb{R}^3$ qui sont représentées dans la base canonique par une matrice A à coefficients *entiers*.

Comme plus haut, on s'intéresse seulement aux involutions telles que $f \neq I$ et $f \neq -I$. On rappelle qu'il ne subsiste alors que deux cas : ou bien

$$\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 2 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(f + I) = 1,$$

ou bien

$$\dim \operatorname{Ker}(f - I) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker}(f + I) = 2.$$

Le second cas n'est qu'un avatar du premier : comme

$$\operatorname{Ker}\big[(-f) - I\big] = \operatorname{Ker}(f + I) \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}\big[(-f) + I\big] = \operatorname{Ker}(f - I),$$

l'involution f relève du second cas si, et seulement si, l'involution $-f$ relève du premier cas.

Ainsi, quitte à remplacer f par $-f$, on suppose dans ce qui suit que le sous-espace fixe par f est un plan et donc que

$$\operatorname{rg}(f - I) = 1.$$

[10.] Le rang de la matrice $A - I_3$ étant égal à 1, il existe une colonne $C \neq 0$ et une ligne $L \neq 0$ telles que

$$A - I_3 = C.L.$$

La colonne C engendre la droite $\operatorname{Im}(A - I_3)$ et le plan $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ admet $[LX = 0]$ pour équation cartésienne.

La matrice A représente une involution si, et seulement si, $(A - I_3)(A + I_3) = 0_3$, c'est-à-dire

$$0_3 = C.L.(C.L + 2I_3) = (L.C + 2).C.L$$

(l'associativité du produit matriciel permet de mettre en facteur le *scalaire* $L.C$) et comme la matrice $C.L$ n'est pas nulle (son rang est égal à 1 par hypothèse), on en déduit que A est une involution si, et seulement si,

$$L.C + 2 = 0.$$

[11.] En résumé : Étant donné un plan F d'équation $[L.X = 0]$ (où L est une ligne non nulle), la matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ représente une involution de $\mathbb{R}^3$ qui fixe le plan F si, et seulement si, il existe une colonne $C \neq 0$ telle que

$$A = I_3 + C.L \quad \text{et} \quad L.C = -2.$$

Dans ce cas, la droite $G = \operatorname{Ker}(A + I_3)$ est dirigée par la colonne C.

La matrice $-A$ est alors l'involution qui fixe la droite dirigée par la colonne C (sous-espace propre associé à la valeur propre 1) et qui admet le plan d'équation $[L.X = 0]$ comme sous-espace propre associé à la valeur propre -1.

[12.] Coefficients entiers : Lorsque les coefficients de la ligne L sont des entiers, on peut interpréter la contrainte $L.C = -2$ comme une équation de Bézout : l'existence d'une colonne C à coefficients entiers est alors assurée si, et seulement si, le pgcd des coefficients de L est égal à 1 ou 2.

[13.] On fournit une partie de la ligne L et une partie de la colonne C. La colonne est alors complétée en insérant à une position aléatoire un coefficient égal à 1, ce qui permet ensuite de compléter la ligne pour que la contrainte $L.C = -2$ soit satisfaite.

Il reste alors à calculer l'involution $A = I_3 + C.L$. Le programme renvoie également la ligne L (qui caractérise le plan propre associé à 1) et la colonne C (qui dirige la droite propre associée à -1).

```python
def involution(L, C):
    alpha = -2 - C[0]*L[0] - C[1]*L[1]
    indice = rd.randint(3)
    ligne, colonne = L[:], C[:]
    colonne.insert(indice, 1)
    ligne.insert(indice, alpha)
    colonne = np.array(colonne).reshape((3, 1))
    ligne   = np.array(ligne).reshape((1, 3))
    A = np.dot(colonne, ligne) + np.eye(3)
    return A, ligne, colonne
```