Composition de Mathématiques

Le 4 janvier 2023 – De 13 heures à 16 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}_\alpha$, l'ensemble des réels x pour lesquels la somme

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

est convergente.

Partie A. Propriétés générales

1. Calculer le rayon de convergence R_α commun aux séries entières

$$\sum \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ en fonction de α.

3. On suppose que $\alpha > 0$. Déterminer le signe de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$.

4. Expliciter les expressions $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_{-1}(x)$ pour $|x| < 1$.

5. Démontrer que, pour tout $\alpha > 1$, la fonction f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

6. Soit $\alpha \leqslant 1$. En comparant f_α à f_1, démontrer que

$$\lim_{x \to 1} f_\alpha(x) = +\infty.$$

Partie B. Logarithme complexe

7. Donner sans justification le développement en série entière de $\ell n(1+x)$ au voisinage de $x = 0$.

Pour tout nombre complexe z pour lequel la somme a un sens, on note

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}.$$

Le rayon de convergence de la série entière qui définit S est noté R. Pour tout nombre complexe z_0 tel que $|z_0| < R$ et pour tout nombre réel t *tel que la somme ait un sens, on pose*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z_0^n}{n} \cdot t^n.$$

On a alors $g(t) = S(tz_0)$.

8. Quelle est la valeur du rayon de convergence R ? Simplifier l'expression $\exp[S(x)]$ pour tout $x \in]-R, R[$.

9. Calculer le rayon de convergence R_g de la série entière dont la somme est égale à g.

10. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$ et préciser $g'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

11. On pose $h(t) = \exp g(t)$. Démontrer que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}\, h(t).$$

12. Résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire que

$$\exp S(z_0) = z_0 + 1.$$

Partie C. Un calcul d'équivalent

Dans cette partie, on suppose que $0 < \alpha < 1$ et on cherche un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1.
On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie par

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt.$$

Pour $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, dt.$$

13. Démontrer que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale généralisée $I(x)$ est convergente.

14. Soit $x \in]0,1[$. Exprimer $I(x)$ en fonction de α, $\ell n\, x$ et $\Gamma(1-\alpha)$.

15. Soit $x \in]0,1[$. Démontrer que la fonction

$$\varphi_\alpha = \left[t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha} \right]$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$.

16. En déduire que

$$\forall\, 0 < x < 1, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, dt \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, dt.$$

17. En déduire enfin un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1.

❖ II – Problème ❖

Dans ce sujet, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $D_n(\mathbb{K})$, le sous-espace vectoriel des matrices diagonales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

*On **admet** le Théorème suivant, qu'on pourra utiliser librement.*

Si le polynôme caractéristique χ_A de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

(1) $A = D + N$;

(2) la matrice D est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$;

(3) la matrice N est nilpotente ;

(4) les matrices N et D commutent : $ND = DN$.

De plus, les matrices D et N sont des polynômes en A et $\chi_D = \chi_A$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de la matrice A.

Partie A. Quelques exemples

1. a. Donner la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque cette matrice est diagonalisable ; lorsque cette matrice est nilpotente.

1. b. Démontrer que toute matrice trigonalisable admet une décomposition de Dunford.

1. c. Le couple

$$(D, N) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

est-il la décomposition de Dunford de la matrice suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Donner une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford.

3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, puis sa décomposition de Dunford (D, N).

☞ *On rappelle que $\chi_D = \chi_A$.*

On rappelle que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

et que, si les matrices M_1 et M_2 commutent, alors

$$\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1)\exp(M_2).$$

4. Calculer $\exp A$, où A est la matrice définie à la question précédente.

5. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0_n$.

5. a. Démontrer que $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A^2.

5. b. En déduire que la décomposition de Dunford de A est

$$(D, N) = (A^2, A - A^2).$$

Partie B. Un exemple approfondi

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'identité de $\mathbb{R}^3$ sera notée I.

6. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - I) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2I)^2.$$

La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?

7. Déterminer une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Ker}(u - I) = \mathbb{R} \cdot e_1,$$
$$\mathrm{Ker}(u - 2I) = \mathbb{R} \cdot e_2,$$
$$\mathrm{Ker}(u - 2I)^2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3).$$

Écrire la matrice B qui représente u dans cette base.

8. Déterminer la décomposition de Dunford de B. En déduire la décomposition de Dunford de A. *NB : on effectuera tous les calculs matriciels.*

9. Décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$$

en éléments simples. En déduire deux polynômes U et V tels que

$$(X-1)U + (X-2)^2 V = 1$$

avec $\deg U < 2$ et $\deg V < 1$.

On définit les deux endomorphismes p et q en posant :

$$p = V(u) \circ (u - 2I)^2 \quad \textit{et} \quad q = U(u) \circ (u - I).$$

10. Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - 2I)^2$ et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2I)^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - I)$.

11. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d relative à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ définie en **[7.]**. En déduire la décomposition de Dunford (D, N) de A en exprimant D et N comme des polynômes en A.

Partie C. Preuve de l'unicité

12. Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

On considère deux endomorphismes diagonalisables u et v qui commutent. Les valeurs propres (deux à deux distinctes) de u sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on note $E_{\lambda_i}(u)$, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.

12. a. Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on notera v_i, l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par restriction de v.

12. b. En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
13. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
13. a. On suppose que A et B sont diagonalisables. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
13. b. On suppose que A et B sont nilpotentes. Démontrer que $A - B$ est nilpotente.
14. Déterminer les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
15. Démontrer l'unicité du couple (D, N) dans le Théorème de Dunford.

Extraits des rapports du jury

Remarques générales

Rappelons que le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences des candidats sur une large partie du programme. Parmi ces compétences sont systématiquement évaluées :

— la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité à les appliquer ;
— la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
— la présentation de la copie.

Plusieurs correcteurs se plaignent de faiblesses en orthographe de la part des candidats.

S'il est important de mentionner à nouveau que dans l'ensemble les copies sont bien présentées, les questions numérotées, les résultats mis en évidence et les conclusions rédigées, il est tout aussi important de souligner que la rédaction manque trop souvent de rigueur et de précision. Des arguments sont absents, les hypothèses des résultats utilisés ne sont pas toujours vérifiées et les conclusions sont données trop rapidement. Il ne suffit pas d'affirmer la conclusion, il faut prouver les affirmations.

Un nombre important de candidats ne prennent pas le recul nécessaire pour voir que des questions sont utiles pour répondre efficacement aux suivantes. Une partie de problème est rarement une succession d'exercices indépendants.

Une attention particulière doit être donnée à la précision dans l'utilisation des résultats du cours. Il arrive trop souvent qu'une hypothèse soit oubliée ou que la vérification rigoureuse de celle-ci soit remplacée par l'affirmation que l'hypothèse est bien satisfaite.

Premier problème

1. Dans la plupart des copies, la méthode de d'Alembert est appliquée correctement. Attention cependant aux conclusions du type *"la série converge si, et seulement si,* $|x| \leqslant 1$*"* sans avoir déterminé le comportement de la série au bord de l'intervalle de convergence.

2. Réussie par une minorité de candidats. Beaucoup déterminent correctement le rayon de convergence à la question précédente mais certains le recalculent pour cette question et d'autres donnent ensuite des ensembles de définition fantaisistes comme $[0, 1]$, $[0, +\infty[$... Cela montre que, pour ces candidats, la notion de rayon de convergence n'est pas comprise.

3. Le théorème des séries alternées est correctement appliqué par une moitié des candidats.

4. Les formules classiques sont connues dans l'ensemble, bien que certains se contentent d'écrire la somme sans chercher à la calculer.

5. Beaucoup se contentent de justifier par la continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle **ouvert** de convergence.

6. La comparaison est effectuée la plupart du temps sans se soucier du signe de x. La limite de $f_1(x)$ en 1 est souvent mal justifiée.

8. Certains reconnaissent le développement en série entière du logarithme, d'autres appliquent la méthode de d'Alembert.

9. Beaucoup de candidats n'ont pas vu que la variable est t, et pensent que le rayon de convergence est à nouveau 1. D'autres oublient de traiter le cas $z_0 = 0$ et donnent comme rayon de convergence le complexe $1/z_0$.

10. Pour la preuve du caractère $\mathscr{C}^\infty$, certains le justifient rapidement car g est somme d'une série entière (justification fréquente, même parmi les copies affirmant que le rayon de convergence est 1). D'autres appliquent le théorème de dérivation terme à terme.

11. Seulement une poignée de copies font mention du fait qu'une fonction à valeurs complexes est en jeu.

12. Cette question est mal comprise. Cela montre que l'objectif de définir un logarithme complexe dans cette partie du sujet n'a pas été compris. Dans une grande majorité des copies, on trouve l'expression $A\exp[\ell n(1 + tz_0)]$ dans laquelle on finit par prendre $A = 1$.

13. La continuité de l'intégrande est souvent omise.

16. Souvent justifiée trop rapidement.

Deuxième problème

1. Quand A est diagonalisable ou nilpotente, certains étudiants ne donnent pas le couple (D, N) en fonction de A et se contentent de dire qu'il existe.

2. On rencontre souvent des réponses sans justification ou fausses.

4. Il faut rappeler que les matrices I et N commutent !

5. Certains candidats omettent d'expliquer pourquoi la matrice A^2 est diagonalisable.

6. Beaucoup d'erreurs ici. Trop peu de candidats pensent à appliquer le Théorème de décomposition des noyaux en en vérifiant les conditions d'utilisation.

7. La base est souvent bien déterminée mais la matrice B n'est pas toujours correcte.

8. Un grand nombre d'étudiants ne traitent pas cette question calculatoire. On constate que trouver l'inverse d'une matrice de taille 3 pose problème.

9. La plupart des candidats traitent cette question mais certains se trompent dans la décomposition en éléments simples en ne mettant que les termes en $X - 1$ et en $X - 2$. Il est très surprenant de constater que le concept de *décomposition en éléments simples* est loin d'être connu de tous.

10. Le calcul de $p(x)+q(x)$ est souvent faux. Peu de candidats démontrent rigoureusement que p et q sont des projecteurs.

12. La plupart des copies traitent correctement la stabilité mais l'existence de base de diagonalisation commune donne lieu à des non-sens.

13. Rares sont les candidats qui pensent à découper la formule du binôme de Newton en deux sommes. On rappelle que l'hypothèse de commutativité est fondamentale.

14. Il faut penser à mentionner la réciproque, même si sa justification est évidente !

15. Les candidats qui entament cette question pensent généralement à utiliser les précédentes et ne manquent pas de signaler que, d'une part, les matrices D et D' et d'autre part, les matrices N et N' commutent en tant que polynômes de A.

Solution I ❀ Une famille de séries entières

Partie A. Propriétés générales

1. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

— si $|x| < 1$, alors la suite de terme général x^n/n^α tend vers 0 (par croissances comparées d'une suite géométrique de limite nulle et d'une puissance de n);

— si $|x| > 1$, alors cette suite tend vers $+\infty$ (cette fois, la suite géométrique tend vers $+\infty$).

Par définition, le rayon de convergence R_α est donc égal à 1 (quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$).

REMARQUE.— On peut aussi utiliser la règle de D'Alembert : pour tout $x \in \mathbb{C}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)^\alpha}{x^n n^\alpha}\right| = |x|$$

donc la série entière converge absolument pour $|x| < 1$ (y compris pour $x = 0$) et diverge grossièrement pour $|x| > 1$.

2. Comme le rayon de convergence est égal à 1, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ contient l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ et est contenu dans le segment $[-1, 1]$. Il s'agit donc d'étudier les cas $x = \pm 1$.

Si $\alpha \leqslant 0$, les séries $\sum(\pm 1)^n/n^\alpha$ divergent grossièrement. Dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha =]-1, 1[$.

Si $\alpha > 1$, les séries $\sum(\pm 1)^n/n^\alpha$ convergent absolument et dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha = [-1, 1]$.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, la série $\sum 1^n/n^\alpha$ diverge (série de Riemann) et la série $\sum(-1)^n/n^\alpha$ converge (critère spécial des séries alternées). Dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha = [-1, 1[$.

3. Soit $x \in \mathcal{D}_\alpha$.

Si $x \geqslant 0$, alors $f_\alpha(x) \geqslant 0$ en tant que somme de réels positifs.

Si $x < 0$ et $\alpha > 0$, alors la série $\sum x^n/n^\alpha$ est alternée :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x^n}{n^\alpha} = (-1)^n \cdot \frac{|x|^n}{n^\alpha}$$

et la suite de terme général $|x^n/n^\alpha|$ tend vers 0 en décroissant (car $|x| \leqslant 1$). D'après le Critère spécial des séries alternées, le signe de la somme est alors égal au signe du premier terme, c'est-à-dire au signe de x.

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in \mathcal{D}_\alpha$, la somme $f_\alpha(x)$ est du signe de x.

4. On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

puisque une série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (on rappelle que $R_\alpha = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$). Donc

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

5. Pour $\alpha > 1$,

$$\sup_{x\in\mathcal{D}_\alpha}\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ converge, donc la série de fonctions $\sum x^n/n^\alpha$ converge normalement sur $\mathcal{D}_\alpha$. Comme il s'agit d'une série de fonctions continues sur $\mathcal{D}_\alpha$, la somme f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha$.

> *Pour $\alpha > 0$, l'ensemble $\mathcal{D}_\alpha$ est strictement plus grand que l'intervalle ouvert de convergence, donc le cours sur les séries entières ne permet pas de conclure (il ne donne la continuité que sur l'intervalle ouvert de convergence).*

6. Comme $\alpha \leqslant 1$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, le facteur x^n est *positif*, donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{x^n}{n} \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha}$$

et en sommant sur n,

$$\forall\, x \in [0, 1[, \quad f_\alpha(x) \geqslant f_1(x) = -\ln(1-x).$$

Or $-\ln(1-x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1, donc $f_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

Partie B. Logarithme complexe

7. On *sait* que

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n.$$

8. On reconnaît la série entière donnée en **[7.]** et on *sait* que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

> *Le cours ne nous dit rien sur la somme $S(z)$ de cette série lorsque z est* complexe *!*

❧ Comme on vient de le remarquer, pour x *réel* dans l'intervalle ouvert de convergence,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \exp[S(x)] = \exp\ln(1+x) = 1+x.$$

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}z_0^n}{n}\cdot t^n\right| = \frac{|z_0 t|^n}{n}.$$

Par comparaison d'une suite géométrique et d'une puissance de n, la suite de terme général

$$\frac{(-1)^{n+1}z_0^n}{n}\cdot t^n$$

est bornée si, et seulement si, $|z_0 t| \leqslant 1$, c'est-à-dire si $|t| \leqslant 1/|z_0|$ (si $z_0 \neq 0$) ou pour tout $t \in \mathbb{R}$ (si $z_0 = 0$).

Le rayon de convergence R_g est donc égal à $1/|z_0|$ (avec la convention habituelle $R = +\infty$ si $z_0 = 0$).

10. En tant que somme de série entière dont le rayon de convergence est égal à $R_g > 0$, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert

$$]-R_g, R_g[.$$

Or $|z_0| < 1$ par hypothèse, donc $R_g > 1$ d'après la question précédente et par conséquent, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$[0,1] \subset]-R_g, R_g[\,.$$

Comme $0 \leqslant t \leqslant 1 < R_g = 1/|z_0|$, alors $|-z_0 t| < 1$ et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} z_0^n t^{n-1} \\ &= z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-z_0 t)^n = \frac{z_0}{1-(-z_0 t)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad g'(t) = \frac{z_0}{1+z_0 t}.$$

> *Si on avait seulement $R_g = 1$, la fonction g serait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, mais pas forcément sur $[0,1]$: il faudrait alors étudier soigneusement le comportement de g au voisinage de $t = 1$.*

11. Comme g est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on sait que la composée $\exp \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad (\exp \circ g)'(t) = \exp[g(t)] \cdot g'(t).$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}\, h(t).$$

> *Le théorème de dérivation de $f \circ g$ s'applique en général pour g à valeurs réelles et est encore valable en particulier pour $f = \exp$ lorsque g est à valeurs complexes.*
> *À l'exception de la fonction* exp*, le programme laisse de côté les fonctions* dérivables en fonction d'une variable complexe *et ne donne donc aucun résultat général sur la dérivabilité de $f \circ g$ lorsque g est une fonction à valeurs complexes.*

12. Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : on sait que toutes les solutions sont proportionnelles à une solution particulière.

On sait également qu'une solution particulière peut se déduire d'une primitive de la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{z_0}{1+z_0 t}\right].$$

Mais cette fonction est à valeurs complexes et le programme ignore la notion de logarithme complexe (ce qui fait du logarithme complexe un bon sujet d'étude).

Il suffit de remarquer que la fonction affine

$$h_0 = [t \mapsto 1 + z_0 t]$$

est une solution évidente de l'équation différentielle pour en déduire que la solution générale de cette équation est de la forme

$$A(1+z_0 t).$$

❧ Comme $g(0) = 0$, alors $h(0) = 1$ et par conséquent $A = 1$. On en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad h(t) = 1 + z_0 t$$

et en particulier que

$$\exp S(z_0) = \exp[g(1)] = h(1) = 1 + z_0.$$

> *La fonction S définie en préambule de cette partie est donc une définition possible du logarithme complexe. On rappelle que la fonction* exp *n'est pas injective sur $\mathbb{C}$ (elle est même $2i\pi$-périodique) et qu'on ne peut donc définir ℓn en tant que bijection réciproque de* exp.

Partie C. Un calcul d'équivalent

13. Soit $0 < x < 1$. La fonction

$$\varphi_\alpha = \left[t \mapsto x^t t^{-\alpha} = t^{-\alpha} e^{t\,\ell n\, x}\right]$$

est clairement continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Il reste à vérifier qu'elle est intégrable au voisinage de $t = 0$ et de $t = +\infty$.

La fonction φ_α est intégrable au voisinage de $t = 0$ car

$$\varphi_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$$

avec $\alpha < 1$.

Comme $\ell n\, x < 0$ (puisque $x < 1$),

$$x^t t^\alpha \underset{t\to+\infty}{=} o\big(e^{t(\ell n\, x/2)}\big).$$

Comme $u = \ell n\, x/2 < 0$, on sait que la fonction $[t \mapsto e^{ut}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ_α est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison.

La fonction φ_α est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale généralisée $I(x)$ est bien convergente.

14. Tout d'abord,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1} e^{t\,\ell n\, x}\, dt,$$

ce qui nous rapproche de $\Gamma(1-\alpha)$. Comme $\ell n\, x < 0$, on pose alors

$$u = (-\ell n\, x)t \qquad du = (-\ell n\, x)\, dt$$

et ce changement de variable affine nous donne

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{-\ell n\, x}\right)^{(1-\alpha)-1} e^{-u} \frac{du}{-\ell n\, x} \\ &= (-\ell n\, x)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

15. Il est clair que φ_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha'(t) &= -\alpha t^{-\alpha-1} x^t + \ell n\, x\, t^{-\alpha} x^t \\ &= (-\alpha t^{-1} + \ell n\, x) t^{-\alpha} x^t < 0 \end{aligned}$$

puisque $-\alpha t^{-1} < 0$ et $\ell n\, x < 0$. La fonction φ_α est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.

16. Comme φ_α est décroissante,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in [n, n+1], \quad \varphi_\alpha(n+1) \leqslant \varphi_\alpha(t) \leqslant \varphi_\alpha(n).$$

On intègre sur le segment $[n, n+1]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \varphi_\alpha(t)\, dt \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Comme φ_α est décroissante et intégrable sur $]0,1]$,

$$\frac{x^1}{1^\alpha} \leqslant \int_0^1 \varphi_\alpha(t)\,dt.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} \varphi_\alpha(t)\,dt \leqslant \frac{x^n}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \varphi_\alpha(t)\,dt$$

et en sommant sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{+\infty} \varphi_\alpha(t)\,dt \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_\alpha(t)\,dt$$

pour tout $0 < x < 1$.

> *Le rapport du jury indique qu'une démonstration détaillée est attendue. Je maintiens qu'une* figure soignée et correctement légendée, *rappelant qu'on étudie une fonction décroissante, est une justification satisfaisante.*

17. Il reste à remarquer que

$$\forall\, 0 < x < 1,\ \forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^t = e^{t\,\ell n\, x} \leqslant e^0 = 1$$

et donc que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}.$$

où le majorant est un réel (car $\alpha < 1$) et est indépendant de x. On déduit alors de **[16.]** que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad -\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant f_\alpha(x) - I(x) \leqslant 0$$

et en particulier

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{=} I(x) + \mathcal{O}(1).$$

D'après **[14.]**, l'intégrale $I(x)$ est un *infiniment grand* quand x tend vers 1 : en effet, le facteur constant $\Gamma(1-\alpha)$ est non nul, en tant qu'intégrale d'une fonction strictement positive sur un intervalle de longueur strictement positive. Par conséquent,

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 1}{\sim} I(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{|\ell n\, x|^{1-\alpha}}.$$

REMARQUE.— On retrouve ainsi, sous une forme plus précise, le résultat démontré en **[6.]**.

REMARQUE.— L'intégrale $I(x)$ reste bornée lorsque x tend vers 0, donc l'encadrement du **[16.]** nous dit seulement que f_α reste bornée au voisinage de 0 :

$$f_\alpha(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(1).$$

Cela ne présente aucun intérêt car f_α est *continue* en 0 (en tant que somme d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif).

Solution II ❀ Décomposition de Dunford

Partie A. Quelques exemples

1. a. Si A est diagonalisable, alors $A = A + 0_n$, où A est diagonalisable et 0_n nilpotente. Il est clair que A et 0_n commutent. Donc $(D, N) = (A, 0_n)$.

Si A est nilpotente, alors $A = 0_n + A$, où 0_n est diagonalisable (diagonale, en fait !) et A est nilpotente. Ces deux matrices commutent, donc $(D, N) = (0_n, A)$.

1. b. On *sait* qu'une matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. D'après le Théorème admis dans l'énoncé, une telle matrice admet une décomposition de Dunford.

1. c. La matrice D est diagonalisable (et même diagonale), la matrice N est évidemment nilpotente (d'indice 2) et $A = D + N$... Mais

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND,$$

donc le couple (D, N) *n'est pas* la décomposition de Dunford de la matrice A.

2. On cherche une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé. Comme $\deg \chi_A = 2$, cela signifie que χ_A est un polynôme irréductible de degré 2 et donc que le spectre (réel) de A est vide : *un exemple a été donné en cours.*

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

admet le polynôme irréductible $X^2 + 1$ pour polynôme caractéristique. Comme ce polynôme n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, le Théorème de Dunford ne peut pas s'appliquer. Ce qui ne veut pas dire que la matrice A n'a pas de décomposition de Dunford !

> *On l'a vu en **[1.b.]**, quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ et l'existence d'une décomposition de Dunford est assurée. Il fallait donc chercher une matrice à coefficients* réels *pour trouver un contre-exemple.*

❧ Supposons que A admette une décomposition de Dunford : $A = D + N$, où $N \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente. Comme A n'est pas diagonalisable, la matrice N n'est pas nulle et comme elle est nilpotente, elle n'est pas inversible. Donc son rang est égal à 1 et son indice de nilpotence est égal à 2. Il existe donc une ligne L et une colonne C telles que

$$N = C.L \quad \text{et} \quad L.C = 0$$

(puisque $N^2 = C.(L.C).L = 0_2$). Donc il existe deux réels a et b tels que

$$N = \begin{pmatrix} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix}$$

et

$$D = A - N = \begin{pmatrix} ab & -1-a^2 \\ 1+b^2 & -ab \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\operatorname{tr} D = 0 \quad \text{et} \quad \det D = 1 + a^2 + b^2 > 0.$$

Or D est diagonalisable, donc elle admet deux valeurs propres réelles. Comme la trace (= somme des valeurs propres) est nulle, ces deux valeurs propres sont opposées et leur produit est donc négatif : la contradiction est établie !

3. On développe par la deuxième ligne (ou deuxième colonne) : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}-\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1+\lambda)\big((\lambda-3)(\lambda+5)+16\big) \\ &= -(\lambda+1)^3.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est un ensemble infini, on en déduit que

$$\chi_A = (X+1)^3.$$

❧ Comme le polynôme caractéristique χ_A est scindé, la matrice A admet une décomposition de Dunford et celle-ci est unique.

❧ Comme D est diagonalisable et que $\chi_D = \chi_A$, la matrice D est semblable à la matrice $\text{Diag}(-1,-1,-1) = -I_3$, donc en fait $D = -I_3$ et par conséquent

$$N = A - D = A + I_3.$$

La décomposition de Dunford de A est donc

$$(D, N) = \left(-I_3, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right).$$

> *On peut vérifier, sans perdre trop de temps, que la matrice N est nilpotente : il s'agit d'une matrice de rang 1 (car $C_2 = 0$ et $C_3 = 2C_1$), nilpotente d'indice 2 (l'image de N est dirigée par C_1 et $NC_1 = 0$, donc l'image de N est contenue dans le noyau de N).*
> *Les autres propriétés de la décomposition de Dunford sont évidentes.*

4. Comme $A = D + N$ et que les matrices D et N commutent, on peut calculer les puissances de A à l'aide de la formule du binôme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot D^{n-k}N^k$$

et comme $N^2 = 0_3$, on a donc :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_3 \\ \forall\, n \geqslant 1, \quad A^n &= D^n + \binom{n}{1} D^{n-1}N \\ &= (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nN. \end{aligned}$$

On peut simplifier cette dernière expression :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1}(A + I_3)$$

et constater que cette relation est encore vraie pour $n = 0$.

En revenant à la définition de $\exp(A)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right] I_3 + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n-1)!\, n}\right](A + I_3) \\ &= e^{-1} I_3 + e^{-1}(A + I_3) = e^{-1}(A + 2I_3).\end{aligned}$$

REMARQUE.— Avec un peu plus d'entraînement, on peut aller sensiblement plus vite (en remplaçant des calculs par des théorèmes).

Tout d'abord, comme D est une matrice diagonale,

$$\exp D = \text{Diag}(e^{-1}, e^{-1}, e^{-1}) = e^{-1} I_3.$$

D'autre part, comme N est nilpotente d'indice 2,

$$\exp N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} N^n = I_3 + N = 2I_3 + A.$$

Enfin, comme D et N commutent,

$$\exp A = \exp(D + N) = \exp D \cdot \exp N = e^{-1}(2I_3 + A).$$

5. a. En substituant A^2 à X dans $X(X-1)$, on obtient

$$A^2(A^2 - I_n) = \underbrace{A^2(A - I_n)}_{=0_n}(A + I_n) = 0_3,$$

donc $X(X-1)$ est bien un polynôme annulateur de A^2.

5. b. Il est clair que

$$A = A^2 + (A - A^2)$$

et que les matrices $D = A^2$ et $N = A - A^2$ commutent (ce sont des polynômes en A). D'après la question précédente, la matrice D admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc elle est bien diagonalisable. Enfin, par commutativité de l'algèbre des polynômes en A,

$$N^2 = [A(I_3 - A)]^2 = \underbrace{A^2(A - I_3)}_{=0_n}(A - I_3) = 0_n$$

donc N est bien nilpotente (d'indice 2). Le couple (D, N) est donc une décomposition de Dunford de A et comme le théorème nous assure que cette décomposition est unique, on peut conclure : le couple (D, N) est *la* décomposition de Dunford de A.

Partie B. Un exemple approfondi

6.

> *Il s'agit manifestement d'appliquer le Théorème de décomposition des noyaux : on cherche donc un polynôme annulateur de A et nous allons pour cela partir de l'énoncé, plutôt que nous fonder sur le cours seul.*

Il est clair que

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc que
$$(A - I_3)(A - 2I_3)^2 = 0_3.$$
Le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de A (et donc de u), les deux facteurs $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux, donc
$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u - I) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2I)^2$$
d'après le Théorème de décomposition des noyaux.

❧ Les valeurs propres de u sont racines des polynômes annulateurs, donc le spectre de u est contenu dans $\{1; 2\}$. Il est clair que les matrices $(A - I_3)$ et $(A - 2I_3)$ ne sont pas inversibles :
$$(0, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(u - I), \qquad (1, 1, 0) \in \operatorname{Ker}(u - 2I)$$
donc $\operatorname{Sp}(u) = \{1; 2\}$, mais on voit aussi que
$$\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2$$
donc
$$\dim \mathbb{R}^3 \neq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$$
et par conséquent, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Variante — *On a trouvé un polynôme annulateur unitaire de A, qui possède cinq diviseurs unitaires stricts :*
$$1, X-1, X-2, (X-2)^2, (X-1)(X-2).$$
*En calculant $(A - I_3)(A - 2I_3)$, on constate qu'aucun de ces polynômes n'est un polynôme annulateur de A, donc $(X-1)(X-2)^2$ est en fait le **polynôme minimal** de A. Comme ce polynôme admet une racine double, la matrice A n'est pas diagonalisable.*

Autre variante avec le polynôme caractéristique — *Il faut savoir calculer le polynôme caractéristique vite et bien, en s'inspirant évidemment de l'énoncé !*
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)^2
\end{aligned}$$
On en déduit que $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ et il faut appliquer le Théorème de Cayley-Hamilton avant d'appliquer le Théorème de décomposition des noyaux : ce n'est clairement pas plus rapide que la méthode proposée précédemment.

7. D'après les matrices $(A - I_3)$, $(A - 2I_3)$ et $(A - 2I_3)^2$ écrites plus hauts, on peut choisir
$$e_1 = (0, 1, 1), \quad e_2 = (1, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$
et comme
$$(u - I)(e_1) = 0, \quad (u - 2I)(e_2) = 0, \quad (u - 2I)(e_3) = e_2$$
on en déduit que
$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = 2e_2, \quad u(e_3) = 2e_3 + e_2$$
et donc que
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice B obtenue dépend de la base choisie. Cependant, comme e_1 dirige la droite propre $\operatorname{Ker}(u - I)$, que e_2 dirige la droite propre $\operatorname{Ker}(u - 2I)$ et que (e_2, e_3) est une base du plan stable $\operatorname{Ker}(u - 2I)^2$, la matrice B est nécessairement de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
où le scalaire a est déterminé par la relation
$$(u - 2I)(e_3) = a \cdot e_2.$$

8. Il est clair que le couple
$$(D_0, N_0) = \left(\operatorname{Diag}(1, 2, 2), \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
est la décomposition de Dunford de la matrice B : la matrice D_0 est diagonalisable (puisque déjà diagonale), la matrice N_0 est nilpotente (d'indice 2), les deux matrices commutent et leur somme est égale à B.

❧ La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ est, avec les choix faits plus haut,
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$A = PBP^{-1} = (PD_0P^{-1}) + (PN_0P^{-1}).$$
La matrice $D = PD_0P^{-1}$ est évidemment diagonalisable (elle est semblable à la matrice diagonale D_0) ; la matrice $N = PN_0P^{-1}$ est nilpotente d'indice 2 (deux matrices semblables ont même polynôme minimal) ; les matrices D et N commutent car D_0 et N_0 commutent :
$$\begin{aligned} DN = PD_0P^{-1}PN_0P^{-1} = P(D_0N_0)P^{-1} = P(N_0D_0)P^{-1} \\ = ND \end{aligned}$$
et, par construction, leur somme est égale à A.

Par unicité de la décomposition, le couple (D, N) est bien la décomposition de Dunford de la matrice A.

❧ Puisque l'énoncé le demande clairement, il reste à effectuer les calculs matriciels.

Tout d'abord,
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— soit par pivot, soit en exprimant les vecteurs de la base canonique comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ (cette seconde méthode étant sans doute plus rapide).

Ensuite, on se concentre pour obtenir

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

> *Deux options : ou bien on esquive la question, ce qui libère du temps pour le reste ; ou bien on la traite, mais alors on la traite à fond pour prendre tous les (nombreux) points qui sont distribués. Il faut donc prendre le temps de faire les calculs et ensuite de les vérifier. Pour commencer, a-t-on bien* $PP^{-1} = I_3$ *? INTERDIT de se lancer dans la suite des calculs avant d'avoir procédé à cette vérification. Ensuite : la matrice* D *obtenue est-elle bien diagonalisable ? la matrice* N *obtenue est-elle bien nilpotente ? ces deux matrices commutent-elles ? leur somme est-elle bien égale à* A *?*
> *On n'est bien sûr pas obligé de réaliser toutes ces vérifications, mais il serait bien sot de poser les calculs et de donner ses résultats sans avoir rien vérifié.*

9. D'après le Théorème de décomposition en éléments simples, il existe trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

Pour x voisin de 1,

$$\frac{1}{x-1} \sim \frac{a}{x-1}$$

donc $a = 1$. De même, pour x voisin de 2,

$$\frac{1}{(x-2)^2} \sim \frac{c}{(x-2)^2}$$

donc $c = 1$. Enfin, pour x voisin de l'infini,

$$\frac{a+b}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$$

donc $a + b = 0$ et $b = -1$. Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}.$$

❧ Réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned} 1 &= (X-2)^2 - (X-1)(X-2) + (X-1) \\ &= (X-1)(-X+3) + (X-2)^2. \end{aligned}$$

Le couple $(U, V) = (-X+3, 1)$ convient.

10. Par construction,

$$\begin{aligned} p + q &= (u - 2I)^2 - (u - I)(u - 3I) \\ &= (u^2 - 4u + 4I) - (u^2 - 4u + 3I) = I \end{aligned}$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \qquad p(x) + q(x) = x.$$

❧ Par construction également,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad & p(x) = (u - 2I)^2 \circ V(u)(x) \in \operatorname{Im}(u - 2I)^2 \\ & q(x) = (u - I) \circ U(u)(x) \in \operatorname{Im}(u - I) \end{aligned}$$

(puisque l'algèbre $\mathbb{R}[u]$ des polynômes en u est commutative). On sait **[6.]** que

$$(u - I) \circ (u - 2I)^2 = (u - 2I)^2 \circ (u - I) = 0$$

et donc que

$$\operatorname{Im}(u - 2I)^2 \subset \operatorname{Ker}(u - I), \quad \operatorname{Im}(u - I) \subset \operatorname{Ker}(u - 2I)^2.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Ker}(u-I)} + \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Ker}(u-2I)^2}.$$

On déduit de la décomposition **[6.]** et de la définition même des projections associées à une telle décomposition que p est la projection sur $\operatorname{Ker}(u - I)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - 2I)^2$ et que q est la projection sur $\operatorname{Ker}(u - 2I)^2$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - I)$.

REMARQUE.— Pour information, les matrices de p et q relatives à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$-(A - I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Comme $e_1 \in \operatorname{Ker}(u - I)$ et que $e_2, e_3 \in \operatorname{Ker}(u - 2I)^2$, on a

$$\begin{aligned} p(e_1) &= e_1, & p(e_2) &= 0, & p(e_3) &= 0 \\ q(e_1) &= 0, & q(e_2) &= e_2, & q(e_3) &= e_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, par combinaison linéaire,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

❧ On a retrouvé la matrice D_0 vue en **[8.]**. Par conséquent, le couple $(d, n) = (d, u - d)$ est la décomposition de Dunford de u. On en déduit que

$$\begin{aligned} D &= (A - 2I_3)^2 - 2(A - I_3)(A - 3I_3) \\ &= (A^2 - 4A + 4I_3) - (2A^2 - 8A + 6I_3) \\ &= -A^2 + 4A - 2I_3 \\ N &= A - D \\ &= A^2 - 3A + 2I_3. \end{aligned}$$

> *On doit remarquer que*
> $$N = (A - 2I_3)(A - I_3),$$
> *ce qui permet de calculer* facilement *la matrice* N *et d'en déduire la matrice* $D = A - N$.

Partie C. Preuve de l'unicité

12. a. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$. On a donc $u(x) = \lambda x$ et comme u et v commutent, on en déduit que

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

ce qui prouve que

$$v(x) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

Chaque sous-espace propre $\operatorname{Ker}(u - \lambda I)$ de u est donc stable par l'endomorphisme v.

> *Cette propriété de stabilité justifie l'existence des endomorphismes* v_i.

12. b. Comme v est diagonalisable, chaque endomorphisme induit v_i est lui-même diagonalisable.

Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe une base $\mathscr{B}_i$ du sous-espace $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres pour v_i. Par définition de v_i, chaque vecteur propre pour v_i est aussi un vecteur propre pour v.

Comme $E_{\lambda_i}(u)$ est un sous-espace propre de u, chaque vecteur non nul de ce sous-espace est un vecteur propre pour u.

Par conséquent, chaque famille $\mathscr{B}_i$ est constituée de vecteurs qui sont à la fois des vecteurs propres pour u et des vecteurs propres pour v.

Mais l'endomorphisme u est supposé diagonalisable, donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$$

et par conséquent la famille $\mathscr{B}$ obtenue en concaténant les familles $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ est une base de E. On a expliqué pourquoi les vecteurs de cette base étaient à la fois des vecteurs propres pour u et pour v. On a ainsi démontré qu'il existait une base commune de diagonalisation pour u et v.

13. a. Soient u et v, les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ représentés par les matrices A et B dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par hypothèse, u et v commutent et, d'après **[12.b.]**, il existe une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres pour u et pour v. Les deux matrices

$$A' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) \quad \text{et} \quad B' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(v)$$

sont donc diagonales et par différence, la matrice

$$A' - B' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u - v)$$

est diagonale elle aussi.

L'endomorphisme $(u - v)$ est donc diagonalisable, ce qui prouve que la matrice $(A - B)$ (qui représente $(u - v)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$) est diagonalisable.

13. b. Comme A et B sont deux matrices nilpotentes de taille n, on sait que

$$A^n = B^n = 0_n.$$

Comme A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned}
(A - B)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} A^k B^{2n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} (-1)^k A^k \underbrace{B^{2n-k}}_{=0_n} \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \underbrace{A^k}_{=0_n} B^{2n-k} \\
&= 0_n
\end{aligned}$$

car $(2n - k) \geqslant n$ dans la première somme et $k > n$ dans la seconde.

La matrice $(A - B)$ est donc nilpotente.

REMARQUE.— Notre calcul indique que l'indice de nilpotence est inférieur à $2n$ mais le cours nous assure qu'il est en fait inférieur à n.

14. Si une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors son polynôme caractéristique est égal à X^n. Si de plus cette matrice est diagonalisable, alors son polynôme minimal est scindé, à racines simples. D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Mais le seul diviseur unitaire, scindé, à racines simples de X^n est X. Donc le polynôme minimal de M est égal à X et par conséquent M est la matrice nulle.

Réciproquement, il est clair que la matrice nulle est diagonalisable (elle est même diagonale) et nilpotente (d'indice 1).

La seule matrice diagonalisable et nilpotente de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est donc la matrice nulle 0_n.

15. On suppose qu'il existe deux couples (D_1, N_1) et (D_2, N_2) qui vérifient le Théorème de Dunford et on considère la matrice

$$M = D_1 - D_2 = N_2 - N_1.$$

En particulier, les quatre matrices D_1, D_2, N_1 et N_2 sont des polynômes en A, donc elles commutent deux à deux.

Comme les matrices D_1 et D_2 sont diagonalisables et qu'elles commutent, la matrice M est diagonalisable **[13.a.]**.

Comme les matrices N_1 et N_2 sont nilpotentes et qu'elles commutent, la matrice M est aussi nilpotente **[13.b.]**.

Par **[14.]**, la matrice M est nulle, ce qui prouve que

$$(D_1, N_1) = (D_2, N_2).$$

On a ainsi démontré qu'il existait au plus un couple (D, N) vérifiant les propriétés du Théorème de Dunford.