Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels téléphoniques constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$.
Soit X, la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1❧ *Donner la loi de X. Justifier.*

La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y, la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

2❧ *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer $\mathbf{P}(Y = k \mid X = i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

3❧ *Démontrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. NB : on admettra que*

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n, \quad \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{i}{k}\binom{n}{k}.$$

4❧ *Calculer l'espérance et la variance de Z.*

✍ *Quelle bouillie ! Autant que je sache, la notion d'*expériences indépendantes *n'existe dans aucun cours de mathématiques. La notion de* variable aléatoire *est définie dans tous les cours de mathématiques dignes de ce nom : pourquoi l'énoncé ne se conforme-t-il pas aux exigences posées dans le cours ? Et ce "dans les mêmes conditions", si lourd de sous-entendus, n'est-il pas admirable ?*

De deux choses l'une : ou bien l'énoncé présente une situation où le hasard intervient et laisse le soin de présenter une modélisation probabiliste digne de ce nom ; ou bien l'énoncé impose une telle modélisation. Cet exercice reste dans un entre-deux pénible et apporte ainsi de l'eau au moulin des pignoufs qui n'ont toujours pas compris que le calcul des probabilités est bien une branche des mathématiques.

Bref... Commençons par donner une modélisation de la situation décrite.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une famille

$$(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n)$$

de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, indépendantes, qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$.

✍ *Ici, les variables aléatoires A_i modélisent les n appels effectués dans un premier temps : on interprète l'évènement $[A_i = 1]$ comme le fait que le i-ème appel passé ait permis de joindre le correspondant.*

Les variables aléatoires B_j servent à modéliser les rappels effectués dans un second temps. On interprète l'évènement $[B_j = 1]$ comme le fait que le j-ème rappel effectué ait permis de joindre un correspondant qui n'avait pu être joint lors du premier appel.

1❧ Par définition, le nombre d'appels qui réussissent à joindre le correspondant est égal à

$$X = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

C'est bien une variable aléatoire (somme d'un nombre fini de variables aléatoires) et cette variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ (en tant que somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi binomiale $\mathscr{B}(p)$).

2❧ Pour tout ω, l'entier $X(\omega) \in [\![0,n]\!]$ donne le nombre d'appels qui ont atteint le correspondant. Il faut donc passer $n - X(\omega)$ nouveaux appels pour tenter de joindre les personnes qui n'ont pas répondu au premier appel.

Le nombre de seconds appels qui réussissent à joindre le correspondant est alors égal à

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{n-X(\omega)} B_j(\omega)$$

avec la convention habituelle sur les sommes : si $n - X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 0$.

Il est clair que $Y(\omega)$ est un entier tel que

$$0 \leqslant Y(\omega) \leqslant n - X(\omega)$$

et en particulier que $0 \leqslant Y(\omega) \leqslant n$.

✍ *On a ainsi défini une application $Y : \Omega \to [\![0, n]\!]$ et il nous faut dans un premier temps justifier que cette application est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Soit $0 \leqslant k \leqslant n$ et démontrons que $[Y = k]$ est bien un évènement. Comme $X : \Omega \to [\![0, n]\!]$ est une variable aléatoire, la famille

$$\big([X = i]\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$$

est un système complet d'évènements. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [Y = k] &= \bigsqcup_{i=0}^{n} [Y = k] \cap [X = i] \\ &= \bigsqcup_{i=0}^{n-k} [X = i, Y = k] \end{aligned}$$

puisque

$$\forall\, i > n - k, \quad [X = i, Y = k] = \varnothing.$$

En effet, on a remarqué plus haut que $X(\omega) + Y(\omega) \leqslant n$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \begin{cases} X(\omega) = i \\ Y(\omega) = k \end{cases} \implies X(\omega) + Y(\omega) = i + k > n.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} X(\omega) = i \\ Y(\omega) = k \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell(\omega) = i \\ \sum_{j=1}^{n-i} B_j(\omega) = k \end{cases}.$$

Autrement dit,

$$[X = i, Y = k] = \left[\sum_{\ell=1}^{n} A_\ell = i\right] \cap \left[\sum_{j=1}^{n-i} B_j = k\right].$$

D'après le lemme des coalitions, les sommes

$$X = A_1 + \cdots + A_n \quad \text{et} \quad B_1 + \cdots + B_{n-i}$$

sont des variables aléatoires indépendantes. En particulier,

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant i + k \leqslant n, \quad [X = i, Y = k] \in \mathcal{A}$$

(en tant qu'intersection de deux évènements) et par conséquent

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad [Y = k] \in \mathcal{A}$$

(en tant qu'union d'un nombre fini d'évènements). On a ainsi démontré que Y était bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

❧ Le lemme des coalitions a aussi permis de justifier que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = k) = \mathbf{P}(X = i)\, \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{n-i} B_j = k\right).$$

On sait que $\mathbf{P}(X = i) > 0$ (loi binomiale) et que $B_1 + \cdots + B_{n-i}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n - i, p)$ (en tant que somme de $(n - i)$ variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$). Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n - i, \quad \mathbf{P}(Y = k \mid X = i) = \binom{n-i}{k} p^k (1 - p)^{(n-i)-k}$$

et, comme on l'a déjà remarqué,

$$\forall\, k > n - i, \quad \mathbf{P}(Y = k \mid X = i) = 0$$

(puisque, dans ce cas, $[X = i] \cap [Y = k] = \varnothing$).

3❧ L'application $Z = X + Y$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (en tant que somme de deux variables aléatoires). Comme X et Y prennent des valeurs entières et que $X(\omega) + Y(\omega) \leqslant n$, la variable aléatoire Z prend des valeurs entières comprises entre 0 et n.

Soit $0 \leqslant \ell \leqslant n$. On décompose l'évènement $[Z = \ell]$ sur le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X :

$$[Z = \ell] = \bigsqcup_{i=0}^{n} [Z = \ell] \cap [X = i] = \bigsqcup_{i=0}^{n} [X = i, Y = \ell - i]$$

puisque

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \begin{cases} Z(\omega) = \ell \\ X(\omega) = i \end{cases} \iff \begin{cases} X(\omega) + Y(\omega) = \ell \\ X(\omega) = i \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X(\omega) = i \\ Y(\omega) = \ell - i \end{cases}.$$

Comme Y prend des valeurs *positives*, l'évènement $[Y = \ell - i]$ est impossible (vide) pour $\ell < i \leqslant n$. Il reste donc

$$[Z = \ell] = \bigsqcup_{i=0}^{\ell} [X = i, Y = \ell - i].$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = \ell) = \sum_{i=0}^{\ell} \mathbf{P}(X = i, Y = \ell - i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y = \ell - i \mid X = i)\, \mathbf{P}(X = i).$$

D'après la question précédente et l'indication de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = \ell) &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{\ell-i} p^{\ell-i} q^{(n-i)-(\ell-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{i} p^\ell q^{2n-\ell} q^{-i} \\ &= \binom{n}{\ell} p^\ell q^{2n-\ell} (1 + q^{-1})^\ell = \binom{n}{\ell} [p(1+q)]^\ell (q^2)^{n-\ell}. \end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p[1+q])$ puisque

$$p(1+q) + q^2 = 1.$$

✍ *Tout se passe comme si on avait passé n appels avec une probabilité d'échec égale à q^2.*

On remarquera que q^2 est la probabilité de connaître deux échecs consécutifs lorsque la probabilité de succès est égale à p...

4❧ D'après le cours,

$$\mathbf{E}(Z) = np(1+q),$$
$$\mathbf{V}(Z) = np(1+q)q^2.$$

✍ *Je ne vois pas comment trouver des expressions vraiment plus simples.*