Composition de Mathématiques

Le 25 janvier 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On cherche les fonctions x et y de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases} \tag{S}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie A. Réduction d'une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - 2I_2.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. On le présentera sous forme factorisée.

2. Calculer le rang, l'image et le noyau de la matrice B. En déduire la matrice B^2.

3. On considère une matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

3. a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice P soit inversible.

3. b. Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple (a, b) tel que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs de a et b.

3. c. Que vaut alors $P^{-1}AP$?

4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n comme une combinaison linéaire de I_2 et de A.

Partie B. Application

Quelles que soient les applications x et y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la matrice colonne définie par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

est considérée comme une fonction de t de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée a pour expression

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la colonne $Y(t)$ par

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

où P est la matrice étudiée dans la première partie.

5. a. Démontrer que les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. b. En déduire que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5. c. En déduire qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ v(t) = K_2 e^{2t} \end{cases}.$$

6. Quelle est l'expression générale des solutions du système (S) ?

❖ II – Problème ❖

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

et, pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$\forall\, x > 0, \quad T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

1. Démontrer que l'expression $T_\alpha(f)(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$ et tout $\alpha > 0$.

2. Calculer $T_1(f)(x)$ et $T_2(f)(x)$.

3. On étudie le comportement de $T_\alpha(f)(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. a. On suppose que $\alpha > 2$. Démontrer que

$$\forall\, x > 0, \quad T_\alpha(f)(x) \leqslant \frac{1}{(\alpha-2)x^2}.$$

3. b. On suppose que $0 < \alpha < 2$. Démontrer qu'il existe une constante A_α telle que

$$\forall\, x > 0, \quad T_\alpha(f)(x) \leqslant \frac{A_\alpha}{x^\alpha}.$$

3. c. Démontrer que, quel que soit $\alpha > 0$, la fonction $T_\alpha(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

4. On va ici préciser le comportement de $T_\alpha(f)$ au voisinage de $+\infty$.

4. a. Démontrer que l'expression

$$x^2 T_{\alpha+2}(f)(x) + T_\alpha(f)(x)$$

est indépendante de x.

4. b. En déduire que, pour tout $\alpha > 2$, il existe un réel $B_\alpha > 0$ tel que

$$T_\alpha(f)(x) \sim \frac{B_\alpha}{x^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

4. c. On suppose ici que $0 < \alpha \leqslant 2$. Démontrer que l'expression $x^2 T_\alpha(f)(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B. Étude d'un opérateur intégral

Dans cette partie et la suivante, on considère une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que cette fonction est développable en série entière au voisinage de l'origine : il existe $R > 0$ (peut-être réel, peut-être égal à $+\infty$) et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, x \in \,]-R, R[\,, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme dans la partie précédente, on pose

$$T_\alpha(f)(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\,du$$

où α est un réel strictement positif fixé.

5. Démontrer que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$\big[u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)\big]$$

est intégrable sur l'intervalle $]0, x]$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T_\alpha(f)(x)$ dans le cas particulier $f = [x \mapsto x^n]$.

6. b. En déduire que, dans le cas général,

$$\forall\, x \in \,]0, R[\,, \quad T_\alpha(f)(x) = \frac{a_0}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha+n}\, x^n.$$

6. c. Démontrer que $T_\alpha(f)$ admet une limite réelle au voisinage de 0. On précisera la valeur de cette limite.

7. Démontrer que $T_\alpha(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$xy'(x) + \alpha y(x) = f(x) \qquad (E_{\alpha,f})$$

sur cet intervalle.

8. Dans cette question *seulement*, on suppose que la fonction f est monotone.

8. a. On suppose que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
Démontrer que $\alpha\, T_\alpha(f)(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x > 0$.
En déduire que $T_\alpha(f)$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

8. b. Étudier le cas où f est décroissante.

9. Dans cette question *seulement*, on suppose que la fonction f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que $T_\alpha(f)(x)$ tend vers ℓ/α lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie C. Résolution d'une équation différentielle

On conserve les hypothèses sur la fonction f formulées à la partie précédente.

Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ sur différents intervalles.

10. Démontrer qu'il existe une, et une seule, série entière dont le rayon de convergence soit supérieur à R et dont la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

soit solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

11. Dans cette question, on travaille sur l'intervalle

$$I_+ = \,]0, +\infty[\,.$$

11. a. Calculer les solutions de l'équation $(E_{\alpha,f})$ sur I_+.

11. b. Démontrer que, sur l'intervalle I_+, l'équation $(E_{\alpha,f})$ admet une, et une seule, solution qui possède une limite finie au voisinage de 0.

12. Démontrer que, sur l'intervalle

$$I_- = \,]-\infty, 0[\,,$$

l'équation $(E_{\alpha,f})$ admet une, et une seule, solution qui possède une limite finie au voisinage de 0.

☞ *En considérant une solution y de $(E_{\alpha,f})$ sur I_-, on pourra étudier la fonction z définie par*

$$\forall\, x \in I_+, \qquad z(x) = y(-x).$$

13. Démontrer que, sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ admet une, et une seule, solution de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie D. Étude d'une famille d'endomorphismes

Dans cette partie, on note E, l'espace vectoriel des fonctions continues de l'intervalle $I_0 = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $h \in E$, on pose

$$L_\alpha(h)(0) = \frac{h(0)}{\alpha}$$

et

$$\forall\, x > 0, \quad L_\alpha(h)(x) = T_\alpha(h)(x).$$

14. Démontrer que L_α est un endomorphisme de E.

15. Soient $0 < \alpha < \beta$ et $h \in E$.

15. a. Démontrer que la fonction H définie sur I_0 par

$$H(x) = x^\alpha \left[L_\alpha\big(L_\beta(h)\big)(x) - \frac{L_\beta(h)(x) - L_\alpha(h)(x)}{\alpha - \beta}\right]$$

est constante sur $]0, +\infty[$.

15. b. En déduire que

$$(L_\alpha \circ L_\beta)(h) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha)(h).$$

16. Démontrer que les endomorphismes L_α et L_β commutent, quels que soient les réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Solution I ❀ Résolution d'un système différentiel

Partie A. Réduction d'une matrice

1. Le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = \det(A - tI_2)$$

(puisque la taille de la matrice est *paire*) et égal à

$$X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

2. Comme

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il est clair que le rang de B est égal à 1 ; que l'image de B, engendrée par les colonnes de B, est la droite vectorielle dirigée par la matrice colonne

$$U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de B est aussi une droite vectorielle (théorème du rang) et comme les colonnes de B vérifient $C_1 - C_2 = 0$, on en déduit que la colonne U_0 appartient au noyau de B et dirige donc le noyau de B.

❧ Comme $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} B$, on en déduit que $B^2 = 0_2$.

3. a. Comme $\det(P) = b - a$, la matrice P est inversible si, et seulement si, $a \neq b$.

3. b. Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice B.

Analyse. S'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors le vecteur ε_1 appartient au noyau de f (première colonne) et $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2)$ (deuxième colonne).

On connaît le noyau de f : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \alpha \cdot U_0$$

et la condition sur P impose de choisir

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors ε_2 parmi les solutions de

$$BX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière de cette équation est bien entendu

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et d'après le principe de superposition, la solution générale de cette équation est

$$X = X_0 + \alpha \cdot U_0 = \begin{pmatrix} -1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(puisque U_0 dirige le noyau de B). La condition sur la deuxième colonne de P impose de choisir $\alpha = -2$ et donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Synthèse. Par **[3.a.]**, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible. D'après les formules de Cramer,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct ou d'après l'analyse précédente,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. c. Comme $A = B + 2I_2$, alors

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}BP + 2P^{-1}I_2P = P^{-1}BP + 2I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Comme les matrices B et $2I_2$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme.

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n &= (2I_2 + B)^n \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} nB \\ &\qquad \text{(car } B \text{ est nilpotente d'indice 2)} \\ &= 2^n I_2 + 2^{n-1} n(A - 2I_2) \\ &= 2^n(n+1)I_2 + 2^{n-1} nA \end{aligned}$$

On remarque que le résultat est vrai aussi pour $n = 0$.

Partie B. Application

5. a. Par hypothèse, les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'après **[3.b.]** (calcul de P^{-1}), $u = 2x + y$ et $v = -x - y$. Ainsi, les fonctions u et v, en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, sont de classe $\mathscr{C}^1$.

5. b. D'après la question précédente,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'(t) + y'(t) \\ -x'(t) - y'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X'(t).$$

Or $X'(t) = AX(t)$, donc

$$Y'(t) = P^{-1}AX(t) = (P^{-1}AP)[P^{-1}X(t)] = (P^{-1}AP)Y(t).$$

5. c. L'équation différentielle précédente se traduit par un système différentiel triangulaire.

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = 2u(t) + v(t) \\ v'(t) = 2v(t) \end{cases}$$

D'après la deuxième équation, il existe une constante K_2 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = K_2 e^{2t}.$$

La première équation devient alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) - 2u(t) = K_2 e^{2t}.$$

On applique la méthode usuelle pour résoudre cette équation différentielle linéaire du premier ordre : il existe une constante K_1 telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = K_1 e^{2t} + K_2 t e^{2t}.$$

6. Comme $X(t) = PY(t)$, on déduit de la question précédente que l'expression générale des solutions de (S) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (K_1 + K_2 t)e^{2t} \\ K_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

d'où on déduit enfin que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = K_1 e^{2t} + K_2(1+t)e^{2t} \\ y(t) = -K_1 e^{2t} - K_2(2+t)e^{2t} \end{cases}.$$

REMARQUE.— Il y a deux constantes d'intégration (puisqu'il s'agit d'un système différentiel du premier ordre en dimension deux) et ces deux constantes d'intégration relient les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ entre elles.

Solution II ❀ Un opérateur intégral

Partie A. Étude d'un exemple

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$\left[u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)\right]$$

est continue sur l'intervalle $]0, x]$ (on a fixé $x > 0$). Lorsque u tend vers 0,

$$u^{\alpha-1} f(u) = \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^2} \sim u^{\alpha-1}$$

et comme $\alpha > 0$, on en déduit que $u^{\alpha-1}f(u)$ est intégrable au voisinage de $u = 0$, ce qui prouve que l'expression $T_\alpha(f)(x)$ est bien définie.

2. Pour tout $x > 0$,

$$T_1(f)(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \quad \text{et} \quad T_2(f)(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}.$$

3. a. Comme $1 + u^2 \geqslant u^2 > 0$ pour tout $0 < u \leqslant x$, alors

$$\forall\, u \in \,]0, x], \quad 0 \leqslant u^{\alpha-1} f(u) \leqslant u^{\alpha-3}.$$

Pour $\alpha > 2$ (et *seulement* pour $\alpha > 2$), le majorant est intégrable au voisinage de 0 et, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant T_\alpha(f)(x) \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-3}\, du = \frac{x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)x^\alpha}.$$

3. b. La fonction g définie par

$$\forall\, u > 0, \quad g(u) = \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, elle est équivalente à $u^{\alpha-1}$ et donc intégrable au voisinage de $u = 0$ (puisque $\alpha > 0$), elle est équivalente à

$$u^{\alpha-3} = \frac{1}{u^{1+(2-\alpha)}}$$

et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ (puisque $2 - \alpha > 0$). La fonction g étant positive et intégrable sur $]0, +\infty[$, on en déduit que la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^x g(u)\, du\right]$$

est positive, croissante et majorée sur $]0, +\infty[$:

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_0^x g(u)\, du \leqslant \int_0^{+\infty} g(u)\, du.$$

En posant

$$A_\alpha = \int_0^{+\infty} g(u)\, du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^2}\, du$$

on a donc

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant T_\alpha(f)(x) \leqslant \frac{A_\alpha}{x^\alpha}.$$

3. c. L'encadrement du **[3.a.]** montre que $T_\alpha(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour $\alpha > 2$.

L'encadrement du **[3.b.]** montre que $T_\alpha(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour $0 < \alpha < 2$.

La formule du **[2.]** montre que $T_2(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

REMARQUE.— Les majorations qui figurent dans l'énoncé au **[3.a.]** et au **[3.b.]** ne suffisent pas pour conclure : il faut bien des encadrements !

4. a. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} x^2 T_{\alpha+2}(f)(x) + T_\alpha(f)(x) &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha+1} + u^{\alpha-1}}{1+u^2}\, du \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1}\, du = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

L'expression est bien indépendante de x.

4. b. D'après **[3.c.]**, $T_\alpha(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On déduit de la relation établie au **[4.a.]** que

$$x^2 T_{\alpha+2}(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha}$$

c'est-à-dire que, quel que soit $\alpha > 0$,

$$T_{\alpha+2}(f)(x) \sim \frac{1}{\alpha x^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit (l'opération de substitution : $\alpha \leftarrow \alpha + 2$ est possible grâce au quantificateur) que

$$\forall\, \alpha > 2, \quad T_\alpha(f)(x) \sim \frac{1}{(\alpha-2)x^2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

4. c. Pour $\alpha = 2$, on déduit de **[2.]** que

$$x^2 T_2(f)(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Pour $0 < \alpha < 2$, on déduit de l'étude du **[3.b.]** que

$$\int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} f(u)\, du = A_\alpha > 0$$

et par conséquent que

$$T_\alpha(f)(x) \sim \frac{A_\alpha}{x^\alpha}.$$

Comme l'intégrale A_α est strictement positive, on en déduit enfin que

$$x^2 T_\alpha(f)(x) \sim A_\alpha x^{2-\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

puisque l'exposant $(2-\alpha)$ est strictement positif.

Partie B. Étude d'un opérateur intégral

5. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la démonstration du cas particulier étudié au **[1.]** vaut encore pour f !

6. a. Remarquons pour commencer que les fonctions $[x \mapsto x^n]$ vérifient les hypothèses de l'énoncé quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

On calcule sans peine : si $f = [x \mapsto x^n]$, alors

$$\forall\, x > 0, \quad T_\alpha(f)(x) = \frac{x^n}{\alpha + n}.$$

6. b. On déduit de la question précédente qu'on doit ici justifier l'intégration terme à terme suivante :

$$\int_0^x u^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \, du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x u^{\alpha+n-1} \, du.$$

Soit $0 < x < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n définie par

$$\forall\, u \in [0, x], \quad \varphi_n(u) = a_n u^{n+\alpha-1}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, ces fonctions φ_n sont continues sur le segment $[0, x]$ et

$$\sup_{u\in[0,x]} \big|\varphi_n(u)\big| = |a_n|\, x^{n+\alpha-1} = x^{\alpha-1} \times \big(|a_n|\, x^n\big).$$

(Cette majoration est fausse pour $n = 0$ et $0 < \alpha < 1$: dans ce cas, la fonction φ_0 n'est pas bornée !)

Comme $0 < x < R$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement sur le segment $[0, x]$. On peut donc intégrer terme à terme la somme de cette série de fonctions. (Le fait de devoir traiter à part la fonction φ_0 n'est pas une difficulté : comme φ_0 est intégrable sur $]0, x]$, on peut invoquer la linéarité de l'intégrale.)

En divisant par x^α (possible car $x > 0$), on en déduit que

$$\forall\, 0 < x < R, \quad T_\alpha(f)(x) = \frac{a_0}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha + n} x^n.$$

6. c. D'après la question précédente, le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{\alpha + n} x^n$$

est au moins égal à $R > 0$, donc la somme de cette série entière est continue au voisinage de l'origine.

Toujours d'après la question précédente, la fonction $T_\alpha(f)(x)$ coïncide sur $]0, R[$ avec la somme d'une série entière, donc elle admet une limite finie au voisinage de $x = 0$, limite qui est égale à la somme de la série entière pour $x = 0$. Autrement dit :

$$T_\alpha(f)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{a_0}{\alpha}.$$

7. La fonction $\big[u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)\big]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de 0 par **[5.]**, donc la fonction

$$\left[x \mapsto \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du\right]$$

est une primitive de $\big[u \mapsto u^{\alpha-1} f(u)\big]$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (généralisation du Théorème fondamental aux intégrales impropres convergentes).

En tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $T_\alpha(f)$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, R[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} [T_\alpha(f)]'(x) &= \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} \int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du + \frac{1}{x^\alpha} x^{\alpha-1} f(x) \\ &= \frac{-\alpha}{x} T_\alpha(f)(x) + \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

On en déduit d'une part que $T_\alpha(f)$ est bien une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ et d'autre part que $T_\alpha(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (par récurrence : on sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et si $T_\alpha(f)$ est de classe $\mathscr{C}^n$, alors sa dérivée, calculée ci-dessus, est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0, +\infty[$).

8. a. Si f est croissante sur $[0, +\infty[$, alors

$$\forall\, 0 < u \leqslant x, \quad u^{\alpha-1} f(u) \leqslant u^{\alpha-1} f(x)$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$\alpha T_\alpha(f)(x) \leqslant \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} f(x)\, du = f(x).$$

❧ On déduit alors de l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ que

$$\forall\, x > 0, \quad x[T_\alpha(f)]'(x) = f(x) - \alpha T_\alpha(f)(x) \geqslant 0$$

et donc que la dérivée $[T_\alpha(f)]'$ est positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi, la fonction $T_\alpha(f)$ est bien croissante sur $]0, +\infty[$.

8. b. Un raisonnement analogue montre que, si f est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors $T_\alpha(f)$ est aussi décroissante sur $]0, +\infty[$.

9. Il s'agit en fait de vérifier que $\alpha T_\alpha(f)(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$. Pour cela, on s'intéresse donc à la *différence*

$$\alpha T_\alpha(f)(x) - \ell$$

en remarquant (d'après **[8.a.]**) que

$$\ell = \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} \ell \, du.$$

On effectue alors le changement de variable *affine* $u = x \cdot t$:

$$\alpha T_\alpha(f)(x) - \ell = \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \big[f(xt) - \ell\big]\, dt.$$

❧ Nous allons appliquer le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $I =]0,1]$ à la famille de fonctions

$$\varphi_x(t) = \alpha t^{\alpha-1}\big[f(xt) - \ell\big].$$

D'après **[5.]** (et le théorème de changement de variable), pour tout $x > 0$, la fonction φ_x est intégrable sur l'intervalle I.

Pour tout $t \in I$, le produit xt tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (car $t > 0$) et par composition de limites, $\varphi_x(t)$ tend vers 0.

Enfin, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers une limite *finie* au voisinage de $+\infty$, donc elle est bornée sur $[0, +\infty[$:

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, u \geqslant 0, \quad \big|f(u)\big| \leqslant M$$

donc

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x > 0, \quad \big|\varphi_x(t)\big| \leqslant \alpha t^{\alpha-1} \times 2M.$$

Ce majorant est intégrable sur $I =]0,1]$ (car $\alpha > 0$) et indépendant de x : la domination est vérifiée.

On en déduit que

$$\int_0^1 \varphi_x(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^1 0\,dt = 0$$

et donc que

$$T_\alpha(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\ell}{\alpha}.$$

Partie C. Résolution d'une équation différentielle

10. On procède en deux temps : l'analyse de la situation va permettre d'identifier la solution (et de *prouver* qu'il en existe au plus une) ; la synthèse qui suivra se bornera à vérifier que la seule solution possible est effectivement une solution (preuve de l'existence d'une solution).

❧ **Analyse**

Si la fonction S est développable en série entière, il existe un réel $r_0 > 0$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, |x| < r_0, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Comme $r_0 > 0$, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée peut être calculée terme à terme :

$$\forall\, |x| < r_0, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, |x| < r_0, \quad xS'(x) + \alpha S(x) &= \alpha b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha+n) b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha+n) b_n x^n.\end{aligned}$$

Par conséquent, si S est solution de l'équation $(E_{\alpha,f})$ sur l'intervalle $]-R, R[$, alors il faut que $r_0 \geqslant R$ et que

$$\forall\, |x| < R, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha) b_n x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $R > 0$, on peut invoquer l'unicité du développement en série entière et identifier les coefficients terme à terme pour en déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{a_n}{n+\alpha}.$$

Il existe donc *au plus une* solution développable en série entière pour l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ et les coefficients du développement de cette fonction sont connus. (On reconnaît d'ailleurs les coefficients du développement de $T_\alpha(f)$, cf **[6.b.]**)

❧ **Synthèse**

On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{a_n}{n+\alpha}.$$

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à $R > 0$ et que $b_n = o(a_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est au moins égal à R.

Les calculs précédents montrent que la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

est bien une solution de l'équation $(E_{\alpha,f})$ sur $]-R, R[$.

❧ **Conclusion**

L'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ possède une, et une seule, solution développable en série entière sur $]-R, R[$.

11. a. D'après **[7.]**, la fonction $T_\alpha(f)$ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,f})$ sur l'intervalle I_+.

Une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I_+)$ est une solution de l'équation homogène

$$xy'(x) + \alpha y(x) = 0$$

associée à $(E_{\alpha,f})$ si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall\, x \in I_+, \quad y(x) = \frac{K}{x^\alpha}.$$

Comme l'équation $(E_{\alpha,f})$ est linéaire, on déduit du principe de superposition qu'une fonction $y \in \mathscr{C}^1(I_+)$ est une solution de $(E_{\alpha,f})$ sur I_+ si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in I_+, \quad y(x) = T_\alpha(f)(x) + \frac{K}{x^\alpha}.$$

11. b. Par **[6.c.]**, la solution particulière $T_\alpha(f)$ admet une limite finie au voisinage de 0.

Si $K \neq 0$, l'expression K/x^α tend vers l'infini au voisinage de 0 (car $\alpha > 0$), donc la somme

$$\frac{K}{x^\alpha} + T_\alpha(f)(x)$$

tend aussi vers l'infini au voisinage de 0.

Par **[11.a.]**, l'équation $(E_{\alpha,f})$ admet une, et une seule, solution ayant une limite finie au voisinage de 0 : cette solution est la fonction $T_\alpha(f)$.

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_1(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n.$$

Il est clair que la fonction f_1 vérifie toutes les hypothèses qu'on a faites sur la fonction f.

❧ Soit $y \in \mathscr{C}^1(I_-)$ et posons $z(x) = y(-x)$ pour tout $x \in I_+$. Il est clair que $z \in \mathscr{C}^1(I_+)$ et que

$$\forall\, x \in I_+, \quad xz'(x) + z(x) = (-x)y'(-x) + y(-x).$$

Par conséquent, la fonction y est une solution de $(E_{\alpha,f})$ sur l'intervalle I_- si, et seulement si, la fonction z est une solution de (E_{α,f_1}) sur l'intervalle I_+.

Comme la fonction f_1 vérifie les hypothèses faites sur f, on peut appliquer à f_1 le résultat de **[11.b.]** : la fonction $z = T_\alpha(f_1)$ est la seule solution de l'équation (E_{α,f_1}) sur I_+ qui admette une limite finie au voisinage de 0. On en déduit que la fonction

$$y = [x \mapsto z(-x) = T_\alpha(f_1)(-x)]$$

est la seule solution de l'équation $(E_{\alpha,f})$ sur I_- qui admette une limite finie au voisinage de 0.

13. On procède encore par analyse et synthèse.

❧ **Analyse**

Supposons que la fonction $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ soit une solution de $(E_{\alpha,f})$ sur $\mathbb{R}$.

Alors la restriction de y à I_+ est une solution de $(E_{\alpha,f})$ sur I_+ et cette solution tend vers une limite finie lorsque x tend vers 0 (limite égale à $y(0)$, puisque y est continue sur $\mathbb{R}$). D'après **[11.b.]**, il faut donc que

$$\forall\, x \in I_+, \quad y(x) = T_\alpha(f)(x)$$

et d'après **[6.c.]** que

$$y(0) = \frac{a_0}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

De même, la restriction de y à I_- est une solution de $(E_{\alpha,f})$ sur I_- et cette solution tend vers $y(0)$ lorsque x tend vers 0. D'après **[12.]**, il faut donc que

$$\forall\, x \in I_-, \quad y(x) = T_\alpha(f_1)(-x)$$

et d'après **[6.c.]** que

$$y(0) = \frac{f_1(0)}{\alpha} = \frac{a_0}{\alpha}.$$

Cela prouve qu'il existe *au plus une* solution de $(E_{\alpha,f})$ qui soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. (Et on a identifié précisément quelle est cette seule solution possible !)

❧ **Synthèse**

On déduit de **[6.b.]** que

$$\forall\, 0 < x < R, \quad T_\alpha(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha + n} x^n$$

et aussi que

$$\begin{aligned}\forall\, -R < x < 0, \quad T_\alpha(f_1)(-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\alpha + n}(-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha + n} x^n\end{aligned}$$

puisque $0 < -x < R$ dans ce cas.

Comme $R > 0$, la somme (de série entière)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\alpha + n} x^n$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, ce qui prouve que la fonction définie par morceaux en posant

$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad & y(x) = T_\alpha(f)(x) \\ & y(0) = f(0)/\alpha \\ \forall\, x < 0, \quad & y(x) = T_\alpha(f_1)(-x)\end{aligned}$$

est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]-R, R[$ et sur $]0, +\infty[$).

Les calculs précédents ont démontré qu'elle vérifiait l'équation $(E_{\alpha,f})$ sur I_- et sur I_+. Il est clair qu'elle vérifie encore l'équation en $x = 0$, donc elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a ainsi démontré que, sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ admet une, et une seule, solution de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie D. Étude d'une famille d'endomorphismes

14. La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$, donc $T_\alpha(h)$ est bien définie (cf. le cas particulier au **[1.]** et le cas plus général étudié au **[5.]**).

D'après **[7.]**, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, et en particulier continue, sur $]0, +\infty[$.

REMARQUE.— Au **[7.]** (comme au **[5.]**), on a utilisé la continuité de f, mais pas le fait que cette fonction était développable en série entière au voisinage de l'origine : c'est la raison pour laquelle il est inutile de refaire la démonstration.

❧ Par ailleurs, on sait que

$$L_\alpha(h)(0) = \frac{h(0)}{\alpha}$$

mais *on ne peut pas* invoquer le **[6.c.]** pour prouver que cette valeur est la limite de $T_\alpha(h)(x)$ lorsque x tend vers 0 : la démonstration du **[6.c.]** a utilisé le fait que la fonction était développable en série entière au voisinage de l'origine.

❧ On va donc reprendre la démonstration en s'inspirant du **[9.]** Tout d'abord,

$$\forall\, x > 0, \quad \alpha L_\alpha(h)(x) - h(0) = \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1}\big[h(xt) - h(0)\big]\, dt$$

et on pose cette fois

$$\varphi_x(t) = \alpha t^{\alpha-1}\big[h(xt) - h(0)\big].$$

On suppose que $0 < x \leqslant 1$ (ce qui n'est pas une restriction, puisque x va tendre vers 0), donc

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant xt \leqslant 1.$$

Comme la fonction h est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée sur ce segment, donc il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\, u \in [0,1], \qquad \big|h(u)\big| \leqslant M$$

et donc telle que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1,\ \forall\, 0 < x \leqslant 1, \quad \big|\varphi_x(t)\big| \leqslant \alpha t^{\alpha-1} \cdot 2M.$$

Le majorant est indépendant de x et comme $\alpha > 0$, il est intégrable sur $]0,1]$: il y a bien domination.

D'autre part, lorsque x tend vers 0, le produit xt tend vers 0 (quel que soit $t \in]0,1]$), donc $\varphi_x(t)$ tend vers 0 (par continuité de h et le théorème de composition des limites).

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 \varphi_x(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 0\,dt = 0$$

ou, autrement dit,

$$L_\alpha(h)(x) \xrightarrow[x\to 0]{} L_\alpha(h)(0).$$

❧ On a donc démontré que $L_\alpha(h)$ était continue en chaque point de $]0,+\infty[$ et continue également en 0, donc la fonction $L_\alpha(h)$ appartient à l'espace E, donc l'application L_α va bien de E dans E.

❧ La linéarité de L_α est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégration. Par conséquent, L_α est un endomorphisme de E.

15. a. On a intérêt à réécrire l'expression $H(x)$ pour mieux la dériver !

$$\begin{aligned} H(x) = &\int_0^x u^{\alpha-1} T_\beta(h)(u)\,du \\ &- \frac{x^\alpha}{\alpha-\beta}\big[T_\beta(h)(x) - T_\alpha(h)(x)\big] \end{aligned}$$

On sait que $T_\alpha(h)$ est une solution de $(E_{\alpha,h})$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (d'après **[7.]**, en n'utilisant que la continuité de f), donc H est bien une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} H'(x) &= x^{\alpha-1}T_\beta(h)(x) \\ &\quad - \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-\beta}\big[\alpha T_\beta(h)(x) + x[T_\beta(h)]'(x)\big] \\ &\quad + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-\beta}\big[\alpha T_\alpha(h)(x) + x[T_\alpha(h)]'(x)\big] \\ &= x^{\alpha-1}T_\beta(h)(x) \\ &\quad - \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-\beta}\big[(\alpha-\beta)T_\beta(h)(x) + h(x)\big] \\ &\quad + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-\beta}\,h(x) \\ &= x^{\alpha-1}T_\beta(h)(x) - x^{\alpha-1}T_\beta(h)(x) = 0. \end{aligned}$$

Comme la dérivée de H est identiquement nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on en déduit que H est constante sur cet intervalle.

15. b. Lorsque x tend vers 0, l'expression x^α tend vers 0 (car $\alpha > 0$) et on déduit de **[14.]** que

$$L_\alpha\big(L_\beta(h)\big)(x) \to \frac{L_\beta(h)(0)}{\alpha} = \frac{h(0)}{\alpha\beta}$$

et que

$$\frac{L_\beta(h)(x) - L_\alpha(h)(x)}{\alpha-\beta} \to \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{h(0)}{\beta} - \frac{h(0)}{\alpha}\right) = \frac{h(0)}{\alpha\beta}.$$

Par conséquent, la fonction H tend vers 0 au voisinage de 0. Comme cette fonction est constante sur $]0,+\infty[$ (**[15.a.]**), cette fonction est identiquement nulle sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad (L_\alpha \circ L_\beta)(h)(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha)(h)(x).$$

D'après **[14.]**, les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ (y compris en 0), donc l'égalité établie sur l'intervalle *ouvert* $]0,+\infty[$ se prolonge à l'intervalle *fermé* $[0,+\infty[$:

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad (L_\alpha \circ L_\beta)(h)(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha)(h)(x)$$

ce qui signifie bien que

$$(L_\alpha \circ L_\beta)(h) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha)(h).$$

16. Si $\alpha = \beta$, il est clair que L_α et L_β commutent !

Si $\alpha \neq \beta$, alors

$$L_\alpha \circ L_\beta = \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha)$$

(d'après la question précédente) et par symétrie (en échangeant les rôles de α et β)

$$\begin{aligned} L_\beta \circ L_\alpha &= \frac{1}{\beta-\alpha}\,(L_\alpha - L_\beta) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\,(L_\beta - L_\alpha) = L_\alpha \circ L_\beta. \end{aligned}$$

Les endomorphismes L_α et L_β commutent donc, quels que soient les réels strictement positifs α et β.