Une application de la méthode de Monte-Carlo

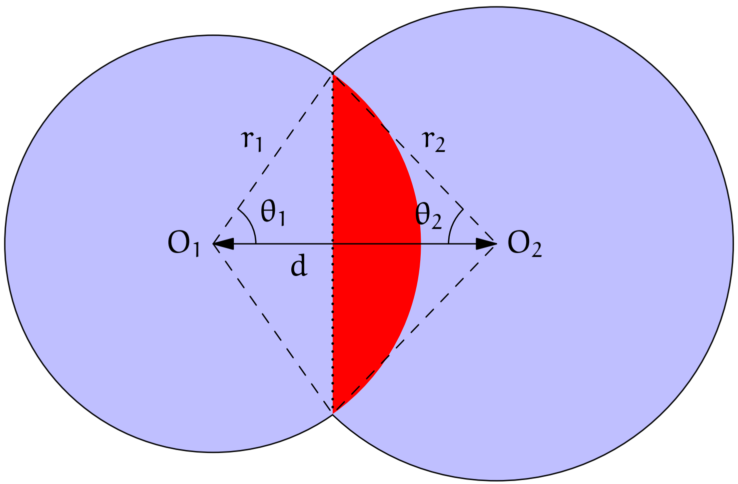
On appelle *méthode de Monte-Carlo* toute manière d'appliquer la Loi des grands nombres, principe fondamental de la Statistique, au calcul intégral. Nous allons l'employer ici pour calculer une valeur approchée de l'aire d'une partie assez compliquée du plan.

Comment calculer l'aire d'une famille de disques ?

On dispose d'une formule simple pour calculer l'aire d'un disque en fonction de son rayon.

$$A(r) = \pi r^2$$

C'est plus compliqué pour calculer l'aire de deux disques lorsqu'ils ne sont pas disjoints !



Si $|r_2 - r_1| \leqslant d \leqslant r_1 + r_2$, alors

$$\cos\theta_1 = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2dr_1} \quad \text{et} \quad \cos\theta_2 = \frac{d^2 + r_2^2 - r_1^2}{2dr_2}.$$

L'aire en rouge est égale à

$$2\theta_1 r_1^2 - r_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1.$$

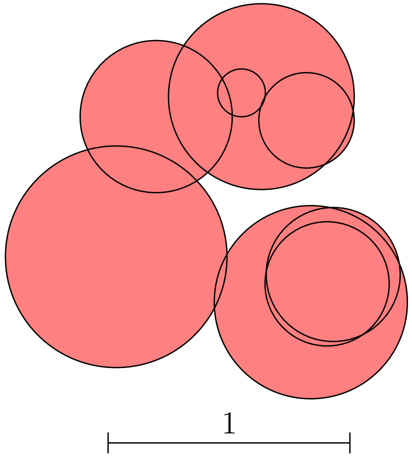
L'aire totale peut s'en déduire :

$$\begin{aligned}\pi(r_1^2 + r_2^2) - 2(\theta_1 r_1^2 + \theta_2 r_2^2)\\ + r_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1\\ + r_2^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2.\end{aligned}$$

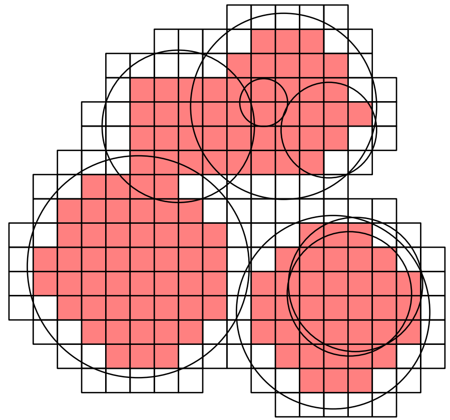
Et avec trois disques ou plus ? Il faudrait trouver une autre méthode !

Encadrement par la méthode des carrés

On cherche à calculer une valeur approchée de l'aire d'une partie bornée A pour laquelle on ne dispose pas d'une formule exacte.

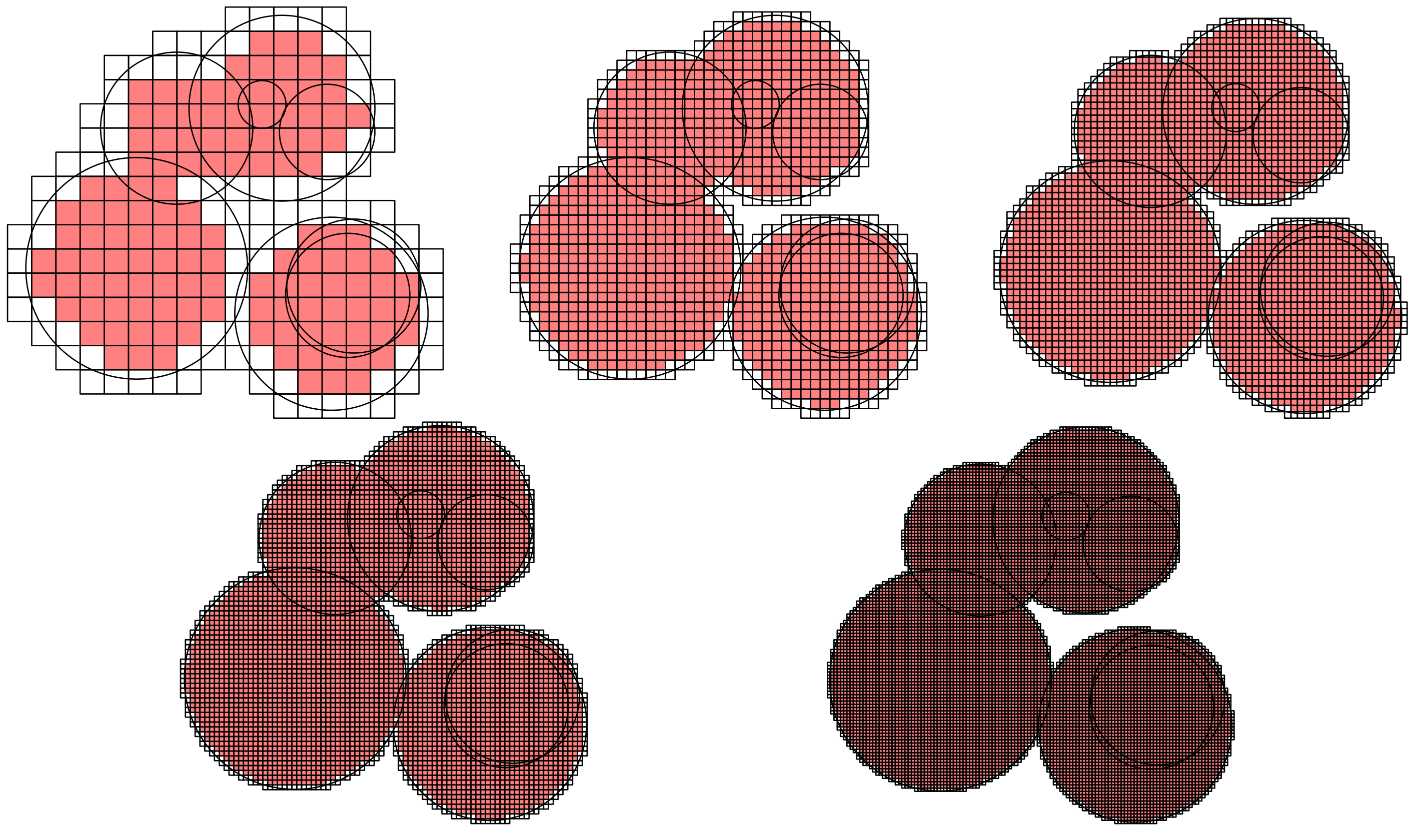


Une manière intuitivement simple consiste à quadriller le plan et à compter d'une part les carrés qui sont entièrement contenus dans A et d'autre part les carrés qui rencontrent la partie A.



La somme des aires des carrés donne alors un encadrement de l'aire de A. Comme on peut s'en douter, plus le côté dR des carrés est petit, plus les calculs durent longtemps et meilleure est la précision.

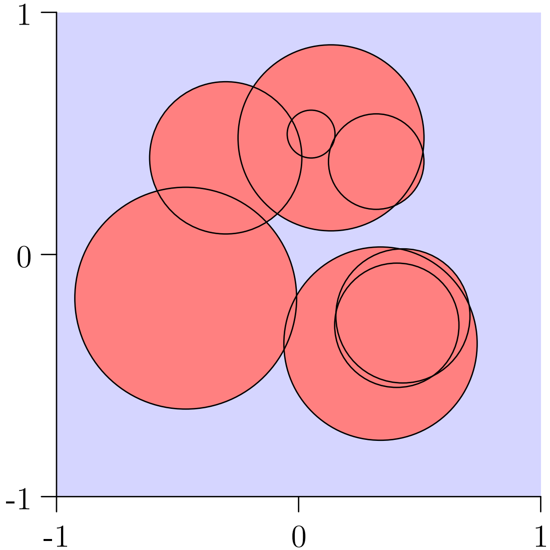
dR	Minorant	Majorant
0,1	1,29	2,25
0,04	1,608	1,971
0,02	1,698	1,878
0,01	1,745	1,835
0,005	1,767	1,813
0,002	1,7808	1,7989



Plus encore que le nombre de calculs à effectuer, le principal défaut de cette méthode est la difficulté à programmer le comptage des carrés : comment savoir si un carré rencontre la partie A ou est tout entier contenu dans A ?

Principe de la méthode de Monte-Carlo

Nous allons maintenant présenter une méthode beaucoup plus simple, car il suffit de savoir si un *point* appartient, ou non, à A.



On considère pour cela un carré contenant A et on calcule un échantillon de points uniformément répartis dans ce carré. Si les points sont assez nombreux pour que l'uniformité de la répartition soit bien respectée, alors

$$\frac{\text{Aire de } A}{\text{Aire du carré}} \approx \frac{\text{Nombre de points dans } A}{\text{Nombre total de points}}.$$

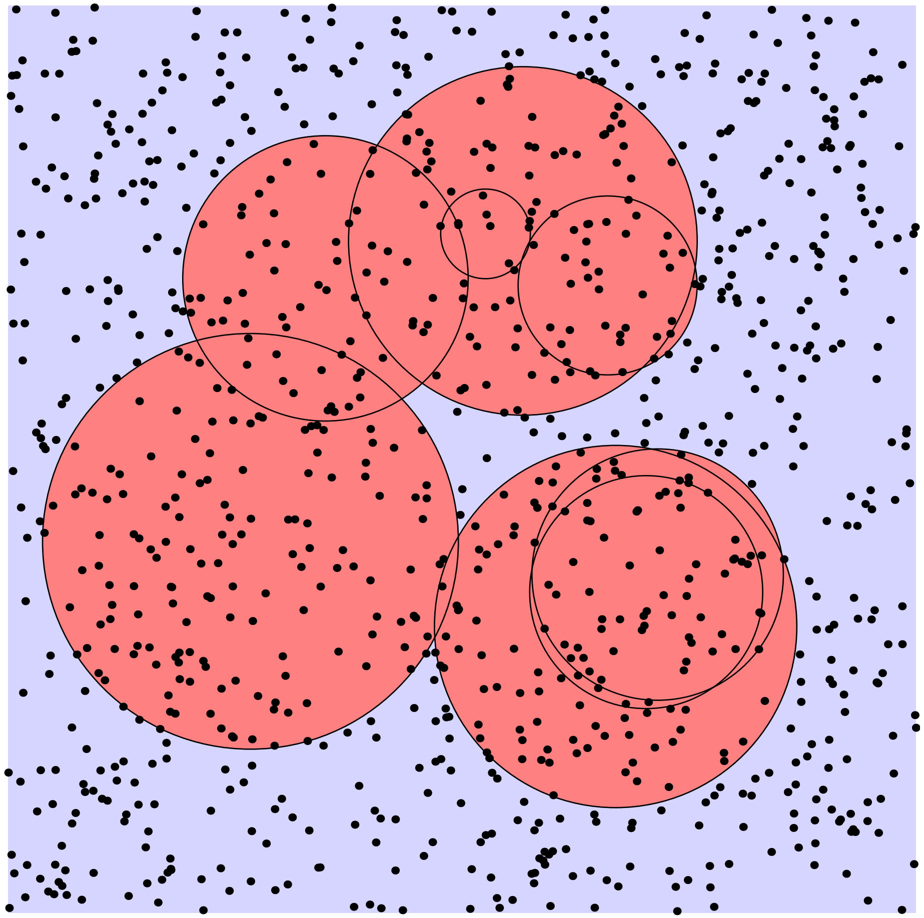
Estimation de l'aire totale des disques en fonction du nombre de points pris pour le calcul

Nombre de points

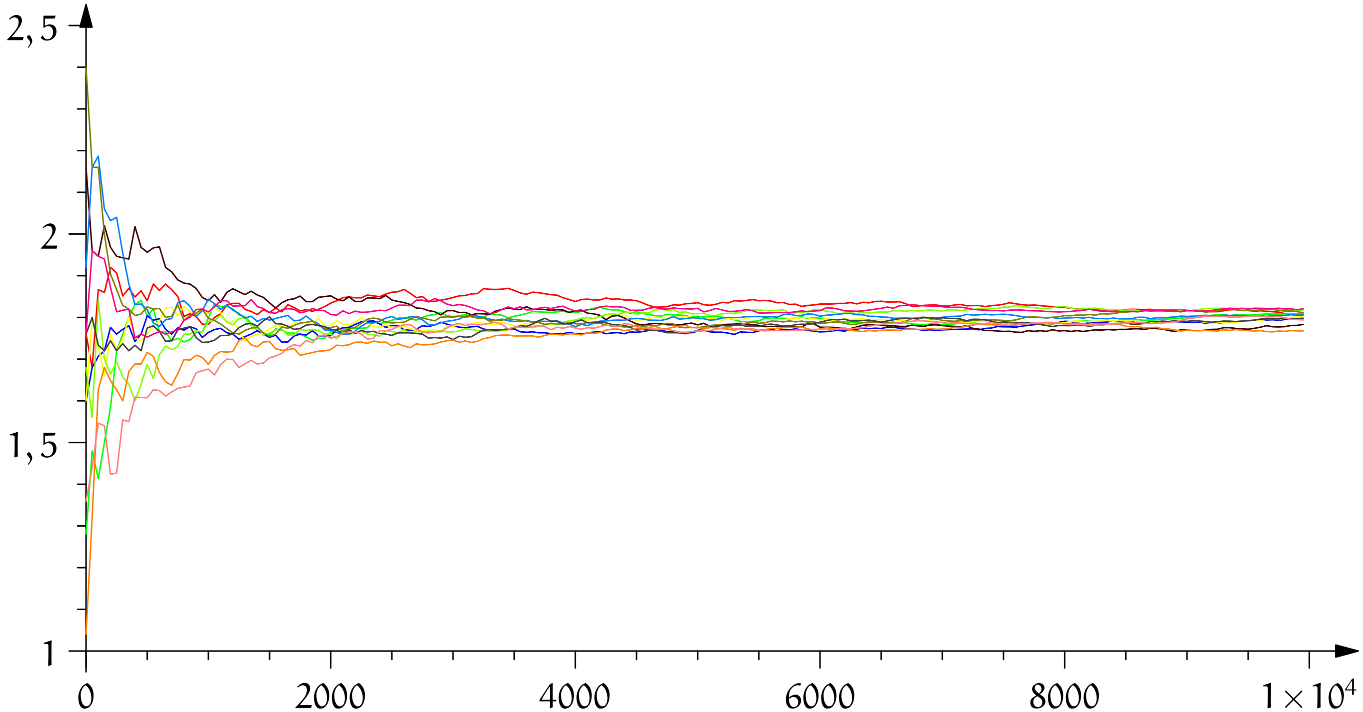
1000

Estimation de l'aire

1,784



Estimation de l'aire totale des disques en fonction du nombre de points pris pour le calcul
Comme pour toute simulation d'un phénomène aléatoire, on ne peut se contenter d'une seule réalisation.



Les différentes simulations donnent des résultats qui paraissent concorder.

Fiabilité des résultats obtenus par la méthode de Monte-Carlo

Soient α, l'aire exacte de A et α_N, la valeur approchée calculée par la méthode de Monte-Carlo à l'aide de N points.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un majorant de la probabilité pour que l'erreur absolue $|\alpha - \alpha_N|$ soit supérieure à $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\big(|\alpha - \alpha_N| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{4}{N\,\varepsilon^2}.$$

Applications numériques
On a calculé précédemment $\alpha_N = 1,8064$ avec $N = 10^4$ points : il y a moins de 4 chances sur 100 pour que $|\alpha - 1,8064| \geqslant 0,1$. On est donc à peu près sûr que

$$1,7 \leqslant \alpha \leqslant 1,9.$$

Avec $N = 10^6$ points, on obtient une valeur approchée pour laquelle il y a moins de 4 chances sur 100 pour que $|\alpha - \alpha_N| \geqslant 0,01$. La première simulation effectuée donne pour valeur approchée $1,789$. On est donc à peu près sûr que

$$|\alpha - 1,79| \leqslant 0,01.$$

Par comparaison, il a fallu manipuler 10^6 carrés pour obtenir la même précision avec la méthode des carrés (au prix de calculs sensiblement plus longs).