

## I

## Quelques recettes

Les équations différentielles les plus simples peuvent être résolues facilement en appliquant les formules ci-dessous.

## I.1 Équations du premier ordre

1. On considère l'équation différentielle linéaire

$$(1) \quad \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ; où les *données*  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et l'*inconnue*  $x$  est une fonction dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

1.1 Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , alors  $x$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

1.2  $\Leftrightarrow$  L'équation homogène associée à (1) est l'équation différentielle suivante.

$$(2) \quad \forall t \in I, \quad x'(t) - a(t)x(t) = 0.$$

## 2. Problème de Cauchy

Une *condition initiale* est un couple  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$ . Le *problème de Cauchy* associé à cette condition initiale consiste à trouver une solution  $x : I \rightarrow \mathbb{K}$  de l'équation (1) qui vérifie en outre la contrainte suivante.

$$(3) \quad x(t_0) = x_0$$

## 3. Principe de superposition

3.1 Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux solutions du problème de Cauchy associées à la même condition initiale  $(t_0, x_0)$ , alors la différence  $x = (x_1 - x_2)$  est une solution de l'équation homogène (2) telle que  $x(t_0) = 0$ .

3.2 Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux fonctions dérivables sur  $I$  telles que  $x_1'(t) = a(t)x_1(t) + b_1(t)$  et  $x_2'(t) = a(t)x_2(t) + b_2(t)$  pour tout  $t \in I$ , alors la combinaison linéaire  $x = \lambda x_1 + x_2$  vérifie

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + [\lambda b_1(t) + b_2(t)].$$

3.3 Si  $a$  est une fonction à valeurs réelles et si  $x$  est une solution de (1), alors  $y = \Re(x)$  et  $z = \Im(x)$  vérifient

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + \Re[b(t)] \\ z'(t) = a(t)z(t) + \Im[b(t)]. \end{cases}$$

## Expression des solutions

4.  $\rightarrow$  Pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$ , il existe une, et une seule, fonction dérivable  $x : I \rightarrow \mathbb{K}$  qui vérifie le problème de Cauchy associé à  $(t_0, x_0)$ .

Cette solution s'exprime par la formule suivante :

$$(4) \quad \forall t \in I, \quad x(t) = e^{A(t)} \left[ x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right]$$

où  $A : I \rightarrow \mathbb{K}$  est la primitive de  $a$  qui s'annule en  $t = t_0$ .

5.  $\rightarrow$  Si la fonction  $a$  est constante, la solution de l'équation différentielle (1) qui vérifie la condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$  s'exprime par la formule suivante :

$$(5) \quad \forall t \in I, \quad x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} b(s) ds.$$

## 6. Méthode générale : Variation de la constante

En pratique :

6.1 On résout l'équation homogène (2) dont les solutions sont de la forme

$$K \exp[A(t)]$$

où  $K$  est une constante.

6.2 On trouve une solution particulière de l'équation complète (1) en la cherchant sous la forme

$$K(t) \exp[A(t)]$$

où  $K$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

6.3 Éventuellement, on détermine la constante d'intégration au moyen de la condition initiale.

## 7. Cas particulier : Équation à coefficient constant

On suppose que la fonction  $a$  est constante (soit  $a(t) = a$  pour tout  $t \in I$ ) et qu'il existe une fonction polynomiale  $P$  de degré  $d$  et un scalaire  $\mu \in \mathbb{C}$  tels que

$$\forall t \in I, \quad b(t) = P(t)e^{\mu t}.$$

7.1 Si  $\mu \neq a$ , alors il existe une fonction polynomiale  $Q$  de degré  $d$  telle que la fonction  $x$  définie par

$$\forall t \in I, \quad x(t) = Q(t)e^{\mu t}$$

soit une solution de (1).

7.2 Si  $\mu = a$ , alors il existe une fonction polynomiale  $Q$  de degré  $d$  telle que la fonction  $x$  définie par

$$\forall t \in I, \quad x(t) = tQ(t)e^{\mu t}$$

soit une solution de (1).

7.3 Dans les deux cas, les  $(d+1)$  coefficients inconnus de  $Q$  peuvent être déduits de l'équation complète en substituant l'expression générale de la solution à  $x(t)$  dans l'équation (1) et en identifiant membre à membre les termes selon leur degré : on est ramené à la résolution d'un système linéaire de  $(d+1)$  équations.

## 8. Singularités

L'équation différentielle

$$(6) \quad \forall t \in I, \quad \alpha(t)x'(t) + \beta(t)x(t) = \gamma(t)$$

peut être mise sous la forme (1) en divisant par  $\alpha(t)$ .

Les réels  $t \in I$  pour lesquels  $\alpha(t)$  est nul sont des *singularités*.

Pour résoudre l'équation (6), on applique d'abord le théorème [4] sur des sous-intervalles de  $I$  exempts de singularité avant d'étudier comment les solutions ainsi trouvées peuvent se raccorder au voisinage de chaque singularité.  $\rightarrow$ [28]-[32]

## I.2 Équations du second ordre

9. On considère l'équation différentielle linéaire

$$(7) \quad \forall t \in I, \quad ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = g(t)$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ; où les *coefficients*  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\lambda$  sont des constantes appartenant à  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; où  $g$  est une fonction de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$  et l'*inconnue*  $x$  est une fonction deux fois dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

9.1 Les solutions de l'équation (7) sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

9.2  $\Leftrightarrow$  L'équation caractéristique associée à l'équation (7) est

$$(8) \quad aX^2 + bX + c = 0$$

## 10. Méthode : Résolution de l'équation homogène

Les solutions de l'équation homogène

$$(9) \quad \forall t \in I, \quad ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

se déduisent de l'équation caractéristique.

**10.1** Si l'équation caractéristique (8) admet deux racines distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ , alors les solutions de l'équation homogène (9) sont de la forme

$$[t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}]$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes appartenant à  $\mathbb{K}$ .

**10.2** Si l'équation caractéristique (8) admet une racine double  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$ , alors les solutions de l'équation homogène (9) sont de la forme

$$[t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda t}]$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes appartenant à  $\mathbb{K}$ .

**10.3** Si les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont réels et si l'équation caractéristique (8) admet deux racines complexes conjuguées distinctes  $\alpha \pm i\beta$ , alors les solutions à valeurs réelles de (9) sont de la forme

$$[t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)]$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes réelles.

### 11. Principe de superposition

**11.1** La différence de deux solutions de l'équation complète (7) est une solution de l'équation homogène (9).

**11.2** La somme d'une solution de l'équation

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = g_1(t)$$

et d'une solution de l'équation

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = g_2(t)$$

est une solution de l'équation

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = g_1(t) + g_2(t).$$

### 12. Méthode : Résolution d'équations complètes simples

L'équation homogène (9) décrit les *oscillations libres* d'un système isolé. L'équation complète (7) décrit les *oscillations entretenues* : le second membre est conçu comme une *excitation* extérieure au système étudié.

#### 12.1 Excitation polynomiale

On suppose que le second membre de l'équation complète a une expression de la forme

$$g(t) = P(t)e^{\lambda_0 t}$$

où  $P$  est une fonction polynomiale. Alors l'équation (7) admet une solution particulière d'expression

$$x(t) = t^m Q(t)e^{\lambda_0 t},$$

où  $Q$  est une fonction polynomiale de même degré que  $P$  et où l'entier  $m \in \{0, 1, 2\}$  est la multiplicité de  $\lambda_0$  comme racine de l'équation caractéristique (8).

**12.2** Il y a *résonance* lorsque  $m \geq 1$  : l'amplitude d'une solution particulière tend à devenir infiniment plus grande que l'amplitude du second membre.

#### 13. Méthode : Résolution par les complexes

Si les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi_0$  et les coefficients de la fonction polynomiale  $P$  sont réels, alors  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution sur  $I$  de

$$ax'' + bx' + cx = P(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_0)$$

si, et seulement si,  $f = \Re(g)$  où  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  est une solution sur  $I$  de

$$ax'' + bx' + cx = P(t)e^{i\varphi_0} e^{(\alpha + i\beta)t}.$$

### Entraînement

#### 14. Questions pour réfléchir

1. Exprimer la solution du problème de Cauchy associé à la condition initiale  $(t_0, x_0)$  au moyen d'une primitive quelconque de  $a$ .

2. On suppose que  $I = ]-\alpha, \alpha[$ . Si  $a$  et  $b$  sont développables en série entière sur  $I$ , les solutions  $x$  sont-elles nécessairement développables en série entière sur  $I$ ?

#### 14.2

3.a Le coefficient réel  $a$  est appelé *constante de temps* des solutions de l'équation différentielle  $x'(t) + ax(t) = 0$ . Expliquer.

3.b Comment interpréter qualitativement ce coefficient  $a$  s'il est complexe?

4. Le comportement qualitatif des solutions de l'équation homogène (9) dépend essentiellement de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique (8).

5. *Suite de [10.3]* – Les solutions à valeurs réelles sont de la forme

$$[t \mapsto A \cos(\beta t + \varphi)e^{\alpha t}]$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes réelles.

6. Condition sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que les solutions de l'équation homogène (9) restent bornées au voisinage de  $+\infty$ ? tendent vers 0 au voisinage de  $+\infty$ ?

7. *Suite de [12]* – Le coefficient réel  $b$  est compris comme un facteur d'amortissement : expliquer. Envisager le cas où  $b = 0$ . Le cas  $\{a > 0, b < 0\}$  est-il physiquement réaliste?

8. On suppose que les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $K$  de l'équation

$$ax'' + bx' + cx = Ke^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

sont réels. Expression des solutions à valeurs réelles lorsque l'équation caractéristique admet

8.a deux racines complexes conjuguées distinctes  $\alpha_0 \pm i\beta_0$ ;

8.b une racine double  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Équations du premier ordre

**15.1** Une fonction  $f$  est une solution de  $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (t^2 + A)e^{-t^2}.$$

**15.2** Une fonction  $f$  est une solution de  $x' - x = e^t \sin 2t$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^t \frac{A - \cos 2t}{2}.$$

**15.3** Une fonction  $f$  est une solution de l'équation différentielle

$$x'(t) - \frac{t}{t^2 - 1}x(t) = 2t$$

sur  $I = ]1, +\infty[$  si, et seulement si, il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in I, f(t) = 2(t^2 - 1) + A\sqrt{t^2 - 1}.$$

**15.4** Une fonction  $f$  est une solution de  $x' + x \tan t = \sin 2t$  sur  $I = ]-\pi/2, \pi/2[$  si, et seulement si, il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in I, f(t) = -2\cos^2 t + A \cos t.$$

**15.5** Une fonction  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$x' + 2x = t^2 e^{-2t} + 2e^{3t} + t + 1$$

si, et seulement si, il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2}{5}e^{3t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{t^3}{3} + A\right)e^{-2t}.$$

**16.** La fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} t^{2n+1}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle

$$(t^2 - 2)x'(t) + tx(t) = -2$$

donc

$$f(t) = \frac{2 \operatorname{Arcsin} t/\sqrt{2}}{\sqrt{2-t^2}}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $2t^2 < 1$ .

**17. Exemples de problèmes de Cauchy**

17.1 La solution de  $x' - (t + 1)(x + 1) = 0$  telle que  $x(0) = 1$  a pour expression  $x(t) = 2 \exp(t + t^2/2) - 1$ .

17.2 La solution de  $(1 + t^2)x' - (t + 1)x = 0$  qui vérifie la condition  $x(0) = -1$  est  $x(t) = -\sqrt{1 + t^2} \exp(\text{Arctan } t)$ .

17.3 La fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 + \int_0^t s f(s) \, ds$$

a pour expression  $f(t) = \exp(t^2/2)$ .

17.4 Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en 0 qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, f'(x) - f(x) = f'(0)e^x.$$

17.5 La solution de l'équation

$$\forall t \in ]-1, 1[, (1 - t)x'(t) + tx(t) = 1$$

qui vérifie  $x(0) = 0$  a pour expression

$$x(t) = (1 - t)e^t \int_0^t \frac{e^{-s}}{(1 - s)^2} \, ds.$$

**18. Comportement à l'infini**

18.1 La solution de  $x' + x = e^{2t}$  qui tend vers 0 au voisinage de  $-\infty$  a pour expression  $e^{2t}/3$ .

18.2 Toutes les solutions de  $x' + x = e^{-t}$  tendent vers 0 au voisinage de  $+\infty$ .

18.3 Si  $f$  est une solution de  $x' - x = \cos t$  sur  $\mathbb{R}$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) + \frac{\cos t - \sin t}{2} = 0.$$

**Équations du second ordre**

19.1 La fonction  $f$  est une solution de  $x'' - x' = t^2$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = -t^3/3 - t^2 - 2t + K_1 + K_2 e^t.$$

19.2 La fonction  $f$  est une solution réelle de  $x'' + x' + x = 0$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left( K_1 \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) e^{-t/2}.$$

19.3 Les solutions de  $x'' - 3x' + 2x = t e^{-t} + \sin(3t)$  ont pour expression

$$\frac{(6t + 5)e^{-t}}{36} + \frac{9 \cos 3t - 7 \sin 3t}{130} + K_1 e^t + K_2 e^{2t}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes réelles.

19.4 La fonction  $f$  est une solution de  $x'' + x = \cos t$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (t/2 + K_1) \sin t + K_2 \cos t.$$

19.5 La fonction  $f$  est une solution de  $x'' + x = t^2 e^{-t}$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{(1 + t)^2 e^{-t}}{2} + K_1 \cos t + K_2 \sin t.$$

19.6 La fonction  $f$  est solution de  $x'' - 2x' + x = t^2 e^{2t}$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (6 - 4t + t^2)e^{2t} + (K_1 + K_2 t)e^t.$$

19.7 La fonction  $f$  est solution de  $x'' + 2x' + x = t^2 e^{-t}$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^4 e^{-t}}{12} + (K_1 + K_2 t)e^{-t}.$$

20.1 Une fonction paire  $g$  vérifie  $g''(t) + g(t) = \cos t$  si, et seulement si, il existe un réel  $A$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = A \cos t + t/2 \sin t.$$

Une fonction impaire  $h$  vérifie  $h''(t) - h(t) = 0$  si, et seulement si, il existe un réel  $B$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = B \text{sh } t.$$

Une fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + f(-t) = \cos t$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = A \cos t + B \text{sh } t + t/2 \sin t.$$

20.2 Une fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + f(-t) = e^{2t}$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = A \cos t + B \text{sh } t + 1/5 \text{ch } 2t + 1/3 \text{sh } 2t.$$

**Problèmes qualitatifs**

**21. Solutions bornées**

Si la fonction continue  $a$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , alors les solutions de  $x'(t) + a(t)x(t) = 0$  sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

**22. Signe des solutions**

Soit  $q$ , une fonction continue, positive, non identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$ .

1. Les solutions de  $x''(t) + q(t)x(t) = 0$  qui sont négatives (resp. positives) sur  $\mathbb{R}$  sont convexes (resp. concaves).

2. Chaque solution s'annule au moins une fois.  $\rightarrow$ [121.1]

23. Soient  $\omega$  et  $T$ , deux nombres réels strictement positifs.

**23.1 Conditions aux limites de Dirichlet**

L'équation différentielle

$$(10) \quad x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

a une solution non identiquement nulle telle que  $x(0) = 0$  et que  $x(T) = 0$  si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega T = k\pi$ .

Étudier l'existence de solutions telles que  $x(0) = a$  et  $x(0) = b$ .

**23.2 Conditions aux limites de Neumann**

L'équation (10) admet une solution non identiquement nulle telle que  $x'(0) = x'(T) = 0$  si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega T = k\pi$ .

Étudier l'existence de solutions telles que  $x'(0) = a$  et  $x'(0) = b$ .

**23.3 Solutions périodiques**

L'équation (10) possède une solution périodique de période  $T$  si, et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega T = 2k\pi$ .

**24. Solutions développables en séries entières**

24.1 L'équation différentielle d'Airy

$$\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) + tx(t) = 0$$

admet une, et une seule, solution développable en série entière  $f$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

24.2 On considère une fonction développable en série entière : est une solution de classe  $\mathcal{C}^2$  de l'équation

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

avec  $R > 0$ . L'équation différentielle

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) - x(t) = v(t)$$

admet une solution développable en série entière

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

si, et seulement si,  $a_1 = 0$  et dans ce cas,

$$\forall n \neq 1, \quad b_n = \frac{a_n}{n^2 - 1}.$$

## 25. Études asymptotiques

25.1 Soient  $m, \alpha$  et  $g$ , trois réels strictement positifs. Quelle que soit la solution  $h$  de l'équation

$$mx'' + \alpha x' = -mg,$$

la dérivée  $h'$  admet une limite finie au voisinage de  $+\infty$ . Interprétation physique ?

25.2 Les solutions de l'équation différentielle  $x' - x = \ell n t$  ont pour expression

$$Ae^t - e^t \int_t^{+\infty} e^{-s} \ell n s \, ds.$$

Aucune de ces solutions n'est bornée au voisinage de  $+\infty$ . Elles sont toutes prolongeables en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$  qui n'est pas dérivable en 0.

25.3 La seule solution bornée de  $x' - tx = t \sin t^2$  a pour expression  $-(2 \cos t^2 + \sin t^2)/5$ .

25.4 Toutes les solutions de  $(1 + t^2)x' = x \operatorname{Arctan} t$  sont paires et bornées.

25.5 Si une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) + f(t) = \ell,$$

alors il existe une fonction continue  $g$  qui tend vers  $\ell$  au voisinage de  $+\infty$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f(0)e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^s g(s) \, ds$$

et la fonction  $f$  tend vers  $\ell$  au voisinage de  $+\infty$ .

## Problèmes de raccordements

26. Une fonction  $f$  est une solution de l'équation

$$x'(t) + x(t) = t^+$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t < 0, \quad f(t) = K_1 e^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f(t) = (t-1) + K_2 e^{-t}.$$

L'ensemble des solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  est une droite affine; il n'y a pas de solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

27. Soient  $a$  et  $b$ , deux réels. La fonction  $f$  définie par

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = \frac{-a}{8} e^{-2t} - \frac{at+b}{4}$$

et par

$$\forall t \leq 0, \quad f(t) = \frac{-a}{8} e^{2t} + \frac{at-b}{4}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x(t) = a|t| + b.$$

C'est la seule solution qui admette des asymptotes aux voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

28. Une fonction  $f$  est une solution de  $t^2 x' - 2tx = -t^4$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t < 0, \quad f(t) = K_1 t^2 - t^3 \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f(t) = K_2 t^2 - t^3.$$

L'ensemble des solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  est un plan affine; l'ensemble des solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  est une droite affine.

29. Soit  $P_0$ , une fonction polynomiale :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_0(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d.$$

L'équation différentielle  $tx'(t) - x(t) = P_0(t)$  admet une solution  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $a_1 = 0$ . Dans ce cas, il existe une constante  $K \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = -a_0 + Kt + \sum_{k=2}^d \frac{a_k}{k-1} t^k.$$

30. La seule solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $tx'(t) + x(t) = \operatorname{Arctan} t$  a pour expression

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t) = \operatorname{Arctan} t - \frac{\ell n(1+t^2)}{2t}.$$

Cette fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

31. Une fonction  $f$  est une solution de  $t^2 x'(t) - x(t) = 0$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \leq 0, \quad f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f(t) = K \exp(-1/t).$$

32. L'ensemble des solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $tx'(t) - \alpha x(t) = 0$  est un espace vectoriel. La dimension de cet espace est nulle pour  $\alpha < 1$ ; égale à 1 pour  $\alpha = 1$  et égale à 2 pour  $\alpha > 2$ .

33.1 La seule solution de  $tx'(t) + x(t) = 1$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction constante égale à 1.

33.2 Une fonction  $f$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation

$$tx'(t) - 2x(t) = t^4$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t < 0, \quad f(t) = K_1 t^2 + \frac{t^4}{2} \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f(t) = K_2 t^2 + \frac{t^4}{2}.$$

33.3 La fonction  $f$  est une solution de l'équation différentielle

$$t(1+t^2)x'(t) - (t^2-1)x(t) = -2t$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\begin{cases} \forall t < 0, & f(t) = \frac{1}{t} + K_1 \frac{1+t^2}{t}, \\ \forall t > 0, & f(t) = \frac{1}{t} + K_2 \frac{1+t^2}{t}. \end{cases}$$

33.4 L'équation différentielle  $tx'(t) - x(t) = t$  n'a pas de solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

34.1 Une fonction  $f$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x'(t) \operatorname{sh} t - x(t) \operatorname{ch} t = 1$  si, et seulement si, il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = -\operatorname{ch} t + K \operatorname{sh} t.$$

34.2 L'équation  $(e^t - 1)x'(t) - e^t x(t) = 1$  n'a pas de solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

34.3 Une fonction  $f$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x'(t) \sin t - x(t) \cos t = -1$  si, et seulement si, il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \cos t + K \sin t.$$

34.4 Une fonction  $f$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $x'(t) \sin^3 t - 2x(t) \cos t = 0$  si, et seulement si, il existe une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]n\pi, (n+1)\pi[, \quad f(t) = K_n \exp \frac{-1}{\sin^2 t}.$$

Quelle que soit la suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

35. On considère les intervalles

$$I_1 = ]-\infty, -1[, \quad I_2 = ]-1, 0[, \quad I_3 = ]0, 1[, \quad I_4 = ]1, +\infty[.$$

Une fonction  $f$  est une solution de  $t(t^2 - 1)x'(t) + 2x(t) = t^2$  si, et seulement si, il existe quatre réels  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  tels que

$$\forall 1 \leq n \leq 4, \forall t \in I_n, \quad f(t) = \frac{K_n + \ell_n |t|}{t^2 - 1} t^2.$$

Il existe une seule solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il existe une seule solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ; cette solution n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

## II

### Équations du premier ordre

36. Toute équation différentielle linéaire peut se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre en choisissant convenablement l'espace des phases. La théorie se limitera donc à l'étude des équations du premier ordre.

#### II.1 Réductions au premier ordre

37. Le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

se ramène à une équation du premier ordre

$$X'(t) = AX(t)$$

avec  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$  et  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ .

38. Sur tout intervalle  $I$  qui ne contient aucun zéro de la fonction  $a$ , l'équation différentielle du second ordre

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = g(t)$$

se ramène à une équation du premier ordre

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ ,  $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}))$  et  $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^2)$ .

39. L'équation différentielle du troisième ordre

$$x^{(3)}(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$$

se ramène à une équation du premier ordre

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

avec  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$ ,  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^3)$ .

40. Le système différentiel du second ordre

$$\begin{cases} x''(t) = ax(t) + by(t) \\ y''(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

se ramène à une équation du premier ordre

$$X'(t) = AX(t)$$

avec  $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^4)$  et  $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ .

#### II.2 Les trois points de vue

##### Systèmes du premier ordre

41. Une équation différentielle du premier ordre dans un espace des phases de dimension  $n$  apparaît d'abord comme un système différentiel de  $n$  équations en  $n$  inconnues.

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x'_2(t) = a_{2,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Les variations de chacune des inconnues dépendent des valeurs prises par les autres inconnues : il y a *couplage*.

42. Un système est *découplé* lorsque les équations qui le composent sont indépendantes les unes des autres : il est alors de la forme suivante.

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) + b_1(t) \\ x'_2(t) = a_{2,2}(t)x_2(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

La résolution d'un tel système se ramène à la résolution des  $n$  équations différentielles qui le composent.

43. Les systèmes couplés *triangulaires* peuvent être résolus assez facilement. Il suffit de considérer le système

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x'_2 = a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x'_n = a_{n,n}x_n + b_n \end{cases}$$

sous la forme suivante

$$\begin{cases} x'_n - a_{n,n}x_n = b_n \\ x'_{n-1} - a_{n-1,n-1}x_{n-1} = a_{n-1,n}x_n + b_{n-1} \\ \vdots \\ x'_2 - a_{2,2}x_2 = a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ x'_1 - a_{1,1}x_1 = a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n + b_1 \end{cases}$$

pour qu'il apparaisse comme la conjonction de  $n$  équations différentielles simples (au sens où ne figure qu'une seule fonction inconnue dans chaque équation).

##### Écriture matricielle

44. On peut aussi écrire un système différentiel du premier ordre sous la forme matricielle suivante.

$$\forall t \in I, \quad X'_t = A_t X_t + B_t$$

La fonction matricielle

$$t \mapsto A_t = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est dite *matrice du système*. La fonction vectorielle

$$t \mapsto B_t = \langle b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t) \rangle \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

est dite *second membre du système*. L'inconnue est la fonction vectorielle

$$t \mapsto X_t = \langle x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \rangle \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

dont la dérivée a pour expression

$$X'_t = \langle x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t) \rangle.$$

**45. Changements de base**

Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , une matrice inversible (indépendante de  $t$ ). Pour tout  $t \in I$ , on pose

$$Y_t = P^{-1}X_t \quad \text{et} \quad \Delta_t = P^{-1}A_tP.$$

**45.1** La fonction vectorielle  $Y$  ainsi définie est dérivable sur  $I$  et

$$\forall t \in I, \quad Y'_t = P^{-1}X'_t$$

de telle sorte que l'équation matricielle

$$\forall t \in I, \quad X'_t = A_tX_t + B_t$$

est équivalente à l'équation matricielle

$$\forall t \in I, \quad Y'_t = \Delta_t Y_t + P^{-1}B_t.$$

**45.2** En pratique, il faut chercher  $P$  de telle sorte que la fonction matricielle  $\Delta$  soit la plus simple possible. Dans le meilleur des cas,  $\Delta_t$  est diagonale pour tout  $t \in I$  (ce qui signifie que les matrices  $(A_t)_{t \in I}$  sont co-diagonalisables) et on est ramené à la résolution d'un système découplé.

**45.3 Variante**

S'il est impossible de trouver une matrice de passage indépendante de  $t$ , on peut chercher un vecteur propre de la transposée de  $A_t$  indépendant de  $t$ . On peut ainsi transformer une équation du second ordre en deux équations du premier ordre à résoudre successivement.  $\rightarrow$  [46.6], [46.7]

**46. Exemples**

**46.1** Le couple de fonctions  $(x, y)$  est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = (2-t)x(t) + (t-1)y(t) \\ y'(t) = (2-2t)x(t) + (2t-1)y(t) \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \exp(t) \\ K_2 \exp(t^2/2) \end{pmatrix}.$$

**46.2** Le couple de fonctions  $(x, y)$  est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = (t+3)x + 2y \\ y' = -4x + (t-3)y \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(t^2/2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

**46.3** Le couple de fonctions  $(x, y)$  est une solution du système

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que  $\rightarrow$  [102]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} \\ K_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

**46.4** Le triplet de fonctions  $(x, y, z)$  est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe trois réels  $K_1, K_2$  et  $K_3$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} \\ K_2 e^{-t} \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

**46.5** Le triplet de fonctions  $(x, y, z)$  est une solution du système

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe trois réels  $K_1, K_2$  et  $K_3$  tels que  $\rightarrow$  [95.4]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 + K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

**46.6** Suite de [45.3] – Une fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  est une solution de l'équation différentielle

$$(11) \quad (1 + e^t)x''(t) + x'(t) - e^t x(t) = 0$$

si, et seulement si, la fonction  $g = f' + f$  est une solution de

$$(1 + e^t)y'(t) - e^t y(t) = 0.$$

Une fonction  $f$  est solution de (11) si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = K_1 e^{-t} + K_2(1 + e^t)(1 + e^{-t}).$$

**46.7** Suite de [45.3] – L'équation différentielle

$$(12) \quad (t+1)x''(t) - (t+2)x'(t) + x(t) = 0$$

se traduit par

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t} \begin{pmatrix} 0 & 1+t \\ -1 & 2+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

La méthode du [45.2] ne peut s'appliquer ici. En remarquant que

$$(1 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 & 1+t \\ -1 & 2+t \end{pmatrix} = (1 \quad -1),$$

on est amené à résoudre

$$x(t) - x'(t) = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = y(t)$$

où  $y$  est une solution de

$\rightarrow$  [61.2]

$$y'(t) = \frac{1}{1+t} y(t).$$

**Écriture vectorielle**

**47.** Nous présenterons la théorie générale en adoptant le point de vue vectoriel suivant. Nous noterons  $uz$ , au lieu de  $u(z)$ , l'image du vecteur  $z$  par l'application linéaire  $u$ .

**47.1**  $\nlessdot$  Soient  $E$ , un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie, dit **espace des phases** et  $I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation de la forme

$$(13) \quad \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où les données sont deux applications continues

$$a : I \rightarrow \text{L}(E) \quad \text{et} \quad b : I \rightarrow E$$

et l'inconnue est une application  $x : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**47.2** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , si les données  $a$  et  $b$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et si  $\varphi$  est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

alors  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ .

**47.3**  $\nlessdot$  L'**équation homogène** associée à l'équation différentielle (13) est l'équation différentielle

$$(14) \quad \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t).$$

Par comparaison avec l'équation homogène (14), l'équation (13) est dite **équation complète**.

**II.3 Problèmes de Cauchy**

48. Une *condition initiale* est un couple constitué d'un instant  $t_0$  dans l'intervalle  $I$  et d'une position  $x_0$  dans l'espace des phases  $E$ .

48.1  $\Leftrightarrow$  Une solution  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$  de l'équation (13) vérifie la **condition initiale**  $(t_0, x_0) \in I \times E$  lorsque  $\varphi(t_0) = x_0$ .

48.2  $\Leftrightarrow$  Un **problème de Cauchy** est la donnée conjointe d'une équation différentielle et d'une condition initiale.

48.3 On ne peut poser, et résoudre, un problème de Cauchy sans avoir au préalable identifié l'espace des phases.

49. Le théorème [50], que nous admettrons, est au fondement de l'étude des équations différentielles linéaires. Pour cette raison, l'équation (13) est dite *sous forme résoluble*.

**50. → Théorème de Cauchy–Lipschitz, version linéaire**

Soient  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie;  $I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$  (de longueur strictement positive);  $a : I \rightarrow \mathbb{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$ , deux applications continues.

Pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une, et une seule, application  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$  telle que  $\varphi(t_0) = x_0$  et que

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t).$$

**51. Exemples**

51.1 Quels que soient  $0 < t_0 < \pi$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ , l'équation

$$x'(t) \sin t - x(t) \cos t = 0$$

admet une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = ]0, \pi[$  telle que  $x(t_0) = x_0$ .

51.2 Quels que soient  $0 < t_0 < \pi$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ , l'équation

$$x'(t) \sin t + x(t) \cos t = 0$$

admet une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = ]0, \pi[$  telle que  $x(t_0) = x_0$ .

51.3 Quels que soient  $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ , l'équation  $\rightarrow$ [38]

$$(1 + t^2)x''(t) + 2(1 - t)x'(t) + x(t) = 0$$

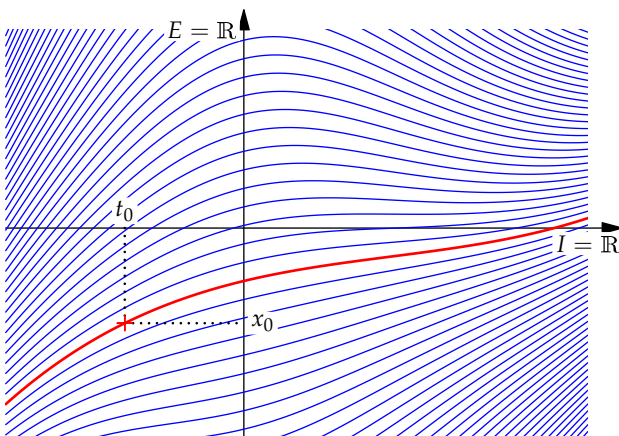
admet une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

**52. Trajectoires**

Le théorème de Cauchy-Lipschitz [50] peut être interprété géométriquement.

52.1  $\Leftrightarrow$  Le graphe de toute solution  $\varphi$  de l'équation différentielle (13) est une courbe tracée dans l'espace  $I \times E$ , appelée **trajectoire** de l'équation différentielle.

52.2 Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, par tout point  $(t_0, x_0)$  de  $I \times E$  passe une trajectoire, et une seule.



En particulier, si les trajectoires de deux solutions d'une équation différentielle linéaire ont un point commun, alors ces deux solutions sont égales.

52.3  $\triangleright$  Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions de la même équation différentielle (13) et s'il existe un instant  $t_1 \in I$  tel que  $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ , alors

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \psi(t).$$

52.4  $\triangleright$  Si  $\varphi$  est une solution de l'équation homogène (14) et s'il existe  $t_1 \in I$  tel que  $\varphi(t_1) = 0_E$ , alors  $\varphi$  est identiquement nulle sur  $I$ .

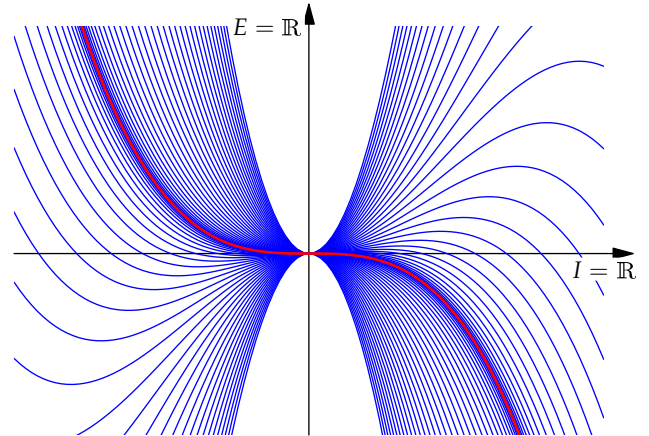
52.5  $\triangleright$  On suppose que  $E = \mathbb{R}$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions de la même équation (13) telles que  $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$ , alors

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) < \psi(t).$$

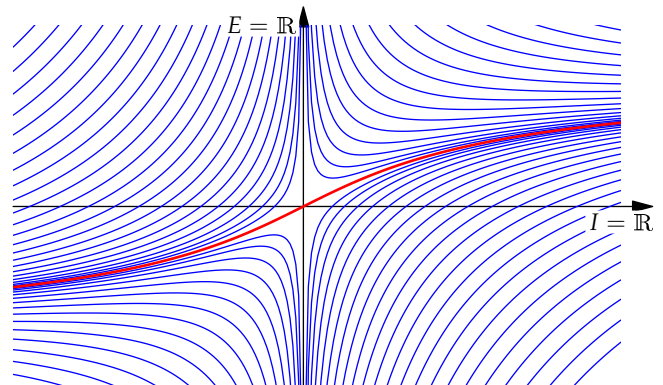
**53. Singularités**

Le théorème de Cauchy-Lipschitz [50] ne peut pas être appliqué à l'équation (6) pour une condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times E$  telle que  $\alpha(t_0) = 0$ . Selon les cas, le problème de Cauchy associé à cette condition initiale peut admettre une seule solution, une infinité de solutions ou pas de solution du tout.

53.1 Équations ayant une infinité de solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  pour une seule condition initiale de la forme  $(t_0, x_0) = (0, x_0)$  mais n'admettant aucune solution pour toute autre condition initiale de cette forme : [28], [29], [31], [33.2], [33.3], [34.1], [34.3], [34.4], [51.1].



53.2 Équations admettant une unique solution de classe  $\mathcal{C}^1$  pour une seule condition initiale de la forme  $(t_0, x_0) = (0, x_0)$  et n'admettant aucune solution pour toute autre condition initiale de cette forme : [30], [33.1], [35], [51.2].



53.3 L'ensemble des solutions développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $\rightarrow$ [38]

$$(15) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad tx''(t) - x'(t) - 4t^3x(t) = 0$$

est le plan engendré par  $f(t) = \exp(t^2)$  et  $g(t) = \exp(-t^2)$ . Quel que soit  $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , le problème de Cauchy associé à la condition initiale  $(t_0, x_0, v_0)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Étudier le cas  $t_0 = 0$ .  $\rightarrow$ [72]

## II.4 Équations scalaires

54.  $\Leftarrow$  Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  est de la forme

$$(16) \quad \forall t \in I, \quad \sum_{k=0}^n a_k(t)x^{(k)}(t) = b(t)$$

où les fonctions  $a_0, \dots, a_n$  et  $b$  sont continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

### 55. Forme résoluble et singularités

Pour appliquer la théorie de Cauchy-Lipschitz, on transforme l'équation scalaire (16) en une équation vectorielle du premier ordre sous forme résoluble :

$$X_t' = A_t X_t + B_t$$

en posant

$$X_t = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-a_0(t)}{a_n(t)} & \dots & \dots & \dots & \frac{-a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

ce qui n'a de sens que si  $a_n$  ne s'annule pas sur  $I$ .

55.1  $\Leftarrow$  Les instants  $t \in I$  tels que  $a_n(t) = 0$  sont les **singularités** de l'équation scalaire (16).

55.2 Soit  $J \subset I$ , un intervalle exempt de singularités. Pour tout  $(t_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in J \times \mathbb{K}^n$ , l'équation scalaire (16) admet une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$  telle que  $x(t_0) = u_0$ ,  $x'(t_0) = u_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$ .

## Entraînement

### 56. Questions pour réfléchir

1. Suite de [46.4] – Les fonctions  $x, y$  et  $z$  sont constantes si, et seulement si,  $x(0) = y(0) + z(0) = 0$ .

2. Condition pour que l'équation (13) admette : au moins une solution constante ; au plus une solution constante.

3. Poser un problème de Cauchy pour l'équation différentielle  $x''(t) + \lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0$ .

4. Suite de [52.2] – Les fonctions sin et cos sont deux solutions distinctes de l'équation  $x'' + x = 0$  alors les graphes de sin et cos ont des points communs : expliquer. Quelles sont les trajectoires de l'équation  $x'' + x = 0$  ?

5. Si  $\varphi$  est une solution de l'équation scalaire (16) associée à la condition initiale  $(t_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in J \times \mathbb{K}^n$ , que vaut  $\varphi^{(n)}(t_0)$  ?

### 57. Étude qualitative locale

L'équation différentielle

$$tx''(t) + (t-4)x'(t) - 3x(t) = 0$$

admet une, et une seule, solution  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = -2$ . Pour  $h$  voisin de 0,

$$f(1+h) = 2 - 2h - \frac{2}{3}h^3 + o(h^3).$$

Quel que soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une infinité de solutions  $g$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g(0) = x_0$ . Chacune d'elles vérifie  $g'(0) = -3x_0/4$ .

## III

## Équations homogènes

58. Suite de [47] – On s'intéresse ici à l'ensemble, noté  $\mathcal{S}_H$ , des solutions de l'équation homogène (14) en supposant que la dimension de l'espace des phases  $E$  est égale à  $n$ .

Tous les théorèmes qui suivent découlent du théorème de Cauchy-Lipschitz [50] et supposent donc qu'il n'y a pas de singularité sur l'intervalle  $I$ .

### Espace des solutions et systèmes fondamentaux

59.1  $\triangleright$  L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, E)$ .

59.2  $\triangleright$  Pour tout  $t_0 \in I$ , l'application  $[f \mapsto f(t_0)]$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}_H$  sur  $E$ .

59.3  $\rightarrow$  Suite de [47] – L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation homogène (14) est un espace vectoriel dont la dimension est égale à la dimension de l'espace des phases  $E$ .

59.4  $\Leftarrow$  Un **système fondamental** de solutions de l'équation différentielle homogène (14) est une base de l'espace  $\mathcal{S}_H$  des solutions de cette équation.

60.  $\rightarrow$  Suite de [47] – On suppose que  $\dim E = n$  et on considère des solutions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de l'équation homogène (14).

60.1 Si la famille de fonctions  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions, alors la famille de vecteurs  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base de l'espace des phases  $E$  pour tout  $t \in I$ .

60.2 Réciproquement, s'il existe un instant  $t_0 \in I$  tel que

$$E = \text{Vect}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)),$$

alors  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions.

### 61. Exemples

61.1 L'équation différentielle

$$(t+1)^2 x''(t) - 2(t+1)x'(t) + 2x(t) = 0$$

admet un système fondamental de solutions polynomiales sur les intervalles  $]-\infty, -1[$  et  $]-1, +\infty[$ . L'ensemble des solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  est un plan vectoriel. Comment la singularité en  $t = -1$  se traduit-elle sur l'espace des solutions ?

61.2 Suite de [46.7] – La fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  est une solution de l'équation (12) si, et seulement si, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = K_1(2+t) + K_2 e^t.$$

Comment la singularité en  $t = -1$  se traduit-elle sur l'espace des solutions ?

### Wronskien

62. Suite de [58] – Une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  étant donnée, on cherche un moyen simple de savoir si  $n$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $\mathcal{S}_H$  forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène (14).

62.1  $\Leftarrow$  Le **wronskien relatif à  $\mathcal{B}$**  de la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est l'application de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  définie par

$$W_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)(t) = \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

62.2  $\triangleright$  Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases de  $E$ , alors les applications  $W_{\mathcal{B}}$  et  $W_{\mathcal{C}}$  sont proportionnelles.

63.  $\rightarrow$  Suite de [58] – Soient  $(f_1, \dots, f_n)$ , une famille de vecteurs de  $\mathcal{S}_H$  et  $W$ , son wronskien relatif à une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

63.1 La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$ .

63.2 Pour tout  $t \in I$ , le wronskien  $W(t)$  est non nul.

63.3 Il existe  $t_0 \in I$  tel que  $W(t_0) \neq 0$ .



**64. Exemple de l'oscillateur harmonique**

L'équation différentielle  $x'' + \omega^2 x = 0$  équivaut au système différentiel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}.$$

L'espace des phases est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$  et un système fondamental de solutions est constitué par

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Le wronskien de cette famille est constant. →[82]

**65. Calcul du wronskien**

On peut calculer l'expression générale des wronskiens d'une équation différentielle sans résoudre cette équation.

**65.1** Soient  $\mathcal{B}$ , une base de  $E$  et  $u \in L(E)$ . On pose

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, u(v_k), \dots, v_n)$$

pour toute famille  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $E$ .

1. L'application  $\Phi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  : elle est proportionnelle à  $\det_{\mathcal{B}}$ .

2. Si  $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ , alors  $\Phi(v_1, \dots, v_n) = \text{tr}(u)$ .

**65.2** → Suite de [58] – Soient  $(f_1, \dots, f_n)$ , une famille de solutions sur  $I$  de l'équation différentielle homogène (14) et  $W$ , son wronskien relatif à une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Quels que soient  $t_0$  et  $t$  dans l'intervalle  $I$ ,

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}[a(s)] \, ds\right).$$

**66. Application pratique**

On suppose que l'espace des phases  $E$  est un plan et qu'une solution  $f$  non nulle de l'équation homogène (14) sur l'intervalle  $I$  est connue.

**66.1** Pour toute solution  $g$  de l'équation (14), le wronskien  $W(f, g)$  est proportionnel à la fonction  $W_0$  définie par

$$\forall t \in I, \quad W_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}[a(s)] \, ds\right).$$

où  $t_0 \in I$  est arbitrairement choisi.

**66.2** Réciproquement, toute solution  $g$  de l'équation linéaire du premier ordre

$$\forall t \in I, \quad f(t)x'(t) - f'(t)x(t) = W_0(t)$$

est une solution de (14) et le couple  $(f, g)$  est alors un système fondamental de solutions de (14).

Une solution particulière  $g$  est de la forme  $g(t) = K(t)f(t)$  avec

$$\forall t \in I, \quad K'(t) = \frac{W_0(t)}{f^2(t)}.$$

**67. Méthode de variation de la constante**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$ , deux fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose connue une solution  $f$  de l'équation homogène

$$(17) \quad \forall t \in I, \quad x''(t) + \alpha(t)x'(t) + \beta(t)x(t) = 0$$

et que  $f(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

**67.1** Le wronskien  $W$  de deux solutions  $f$  et  $g$  est proportionnel à

$$W_0(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds\right).$$

**67.2** Si  $K$  est une constante réelle, alors toute fonction de la forme  $g(t) = Kf(t)$  est une solution de (17).

Si  $K$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors la fonction  $g$  définie par  $g(t) = K(t)f(t)$  est une solution de (17) sur  $I$  si, et seulement si, sa dérivée  $K'$  est une solution de l'équation

$$(18) \quad \forall t \in I, \quad f(t)y'(t) + [\alpha(t)f(t) + 2f'(t)]y(t) = 0.$$

**Entraînement**

**68. Questions pour réfléchir**

1. Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , des solutions de (14) et  $t_1 < t_2$ , deux instants de  $I$ . Comparer le rang de

$$(\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_n(t_1)) \quad \text{et de} \quad (\varphi_1(t_2), \dots, \varphi_n(t_2)).$$

2. Dans quelle mesure peut-on parler du wronskien d'une équation différentielle linéaire?

3. On suppose que  $f$  et  $g = [t \mapsto K(t)f(t)]$  sont des solutions de (17).

3.a Le wronskien de  $f$  et  $g$  est égal à  $-K'(t)f^2(t)$ .

3.b Relier l'équation différentielle  $y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0$  vérifiée par le wronskien [67.1] à l'équation différentielle (18) vérifiée par  $K$ .

**69. Utilisation du wronskien**

Les équations différentielles suivantes ont toutes des solutions polynomiales. Connaissant un telle solution, on pourra faire varier la constante [67] au lieu de passer par le calcul du wronskien.

**69.1** Le wronskien de l'équation

$$(1 + t^2)x''(t) - 2x(t) = 0$$

est constant; ses solutions sont les fonctions de la forme

$$K_1(1 + t^2) + K_2[t + (1 + t^2) \text{Arctan } t].$$

**69.2** Le wronskien de l'équation

$$(1 + t^2)x''(t) - 2tx'(t) - 2\frac{1 - t^2}{1 + t^2}x(t) = 0$$

est proportionnel à  $(1 + t^2)$ ; les solutions sont les fonctions de la forme

$$(1 + t^2)(K_1 + K_2 \text{Arctan } t).$$

**69.3** Le wronskien de

$$t^2x''(t) + tx'(t) - x(t) = 1$$

est proportionnel à  $1/t$  et les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation sont les fonctions de la forme  $K_1t + K_2/t - 1$ .

**69.4** Le wronskien de

$$t^3x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0$$

est proportionnel à  $\exp(1/t)$  et les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  ou sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions de la forme  $t(K_1 + K_2e^{1/t})$ .

Les conditions initiales de la forme  $(t_0 = 0, x_0 = 0, v_0)$  admettent une infinité de solutions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Il n'existe aucune solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  associée à une condition initiale de la forme  $(t_0 = 0, x_0 \neq 0, v_0)$ .

**69.5** Le wronskien de

$$(1 + t^2)x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0$$

est proportionnel à  $1/\sqrt{1 + t^2}$  et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$K_1t + K_2\sqrt{1 + t^2}.$$

**70. Solutions développables en série entière**

Les équations différentielles suivantes ont des solutions développables en série entière au voisinage de 0.

**70.1** Le wronskien de

$$(1 + t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t) = 0$$

est proportionnel à  $1/(1 + t^2)^2$  et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$\frac{K_1 + K_2t}{1 + t^2}.$$

**70.2** Le wronskien de

$$t(1-t)x''(t) + (1-3t)x'(t) - x(t) = 0$$

est proportionnel à  $1/[t(1-t)^2]$  et les solutions de l'équation sur  $]0, 1[$  sont les fonctions de la forme

$$\frac{K_1 + K_2 \ln t}{1-t}.$$

L'équation a des solutions non nulles de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$ .

**70.3** La wronskien de l'équation

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) - x(t) = 0$$

est proportionnel à  $e^t/t$ . Les solutions sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme  $\rightarrow$ [45.3]

$$e^t \left( K_1 + K_2 \int_t^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds \right).$$

Les solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  sont les solutions développables en série entière.

Il existe une, et une seule, solution sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie la condition initiale  $(t_0 = 0; x_0, v_0)$  si, et seulement si,  $v_0 = x_0$ .

**71.** On étudie les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

où  $q$  est une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Si  $f$  est une solution bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $f''$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f'$  tend vers 0 au voisinage de  $+\infty$ .

2. Si  $f$  et  $g$  sont deux solutions bornées, alors leur wronskien

$$W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

tend vers 0 au voisinage de  $+\infty$ .

3. Il existe des solutions qui ne sont pas bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Changements de variables et d'inconnues****72.** Suite de [53.3] –

1. Si la fonction  $f$  est solution de (15) sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors la fonction  $g$  définie par  $g(t) = f(-t)$  est solution de (15) sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

2. La fonction  $f$  est une solution de (15) sur  $\mathbb{R}_+^*$  si, et seulement si, la fonction  $h$  définie par  $h(t^2) = f(t)$ , c'est-à-dire  $h(u) = f(\sqrt{u})$ , est une solution de  $y''(u) - y(u) = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. La fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  est une solution de (15) sur  $\mathbb{R}$  si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = K_1 \operatorname{ch}(t^2) + K_2 \operatorname{sh}(t^2).$$

**73.** Une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) - 2x(t) = \frac{3}{t}$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(t) = tf'(t) + f(t)$  est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad ty'(t) - 2y(t) = \frac{3}{t}.$$

Les solutions  $f$  sont les fonctions de la forme

$$f(t) = \frac{K_1}{t} + K_2 t^2 - \frac{\ln t}{t}.$$

**74.** Une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}^*$  est une solution de l'équation

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = 0$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(t) = tf(t)$  est une solution sur  $I$  de  $y''(t) - y(t) = 0$ .

Les solutions développables en série entière sont proportionnelles sur  $\mathbb{R}^*$  à  $\operatorname{sh} t/t$ .

Il existe une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie la condition initiale  $(t_0 = 0, x_0, v_0)$  si, et seulement si,  $v_0 = 0$ .

**75. Équations de Bessel**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La fonction définie par  $x(t) = t^\lambda z(t)$  est solution de

$$(B_\lambda) \quad \forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \lambda^2)x(t) = 0$$

si, et seulement si,

$$(B'_\lambda) \quad \forall t > 0, \quad tz''(t) + (2\lambda + 1)z'(t) + tz(t) = 0.$$

Si  $\lambda = -1/2$ , les solutions de  $(B_\lambda)$  sont les fonctions de la forme

$$x(t) = K_1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + K_2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}.$$

Si  $\lambda = 1/2$ , les solutions de  $(B'_\lambda)$  sont les fonctions de la forme

$$z(t) = K_1 \frac{\cos t}{t} + K_2 \frac{\sin t}{t}.$$

**76.** Une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de

$$t^2 x''(t) + 3tx'(t) + 4x(t) = t + 4$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(s) = f(e^s)$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$y''(s) + 2y'(s) + 4y(s) = e^s + 4.$$

Les solutions  $f$  sont les fonctions de la forme

$$K_1 \frac{\cos(\sqrt{3} \ln t)}{t} + K_2 \frac{\sin(\sqrt{3} \ln t)}{t} + \left(1 + \frac{t}{7}\right).$$

**77.** La fonction  $f$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation

$$(1+t^2)^2 x''(t) + 2(t-1)(1+t^2)x'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(\theta) = f(\tan \theta)$  est une solution de

$$\forall \theta \in ]-\pi/2, \pi/2[, \quad y''(\theta) - 2y'(\theta) + y(\theta) = 0.$$

Les solutions  $f$  sont les fonctions de la forme

$$e^{\operatorname{Arctan} t} (K_1 + K_2 \operatorname{Arctan} t).$$

**78.** La fonction  $f$  est une solution de l'équation

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad (1-t^2)x''(t) - tx'(t) + 4x(t) = \operatorname{Arccos} t$$

si, et seulement si, la fonction  $g$  définie par  $g(\theta) = f(\cos \theta)$  est une solution de

$$\forall \theta \in ]0, \pi[, \quad y''(\theta) + 4y(\theta) = \theta.$$

Les solutions  $f$  sont les fonctions de la forme

$$K_1 \sin(2 \operatorname{Arccos} t) + K_2 \cos(2 \operatorname{Arccos} t) + \frac{1}{4} \operatorname{Arccos} t,$$

c'est-à-dire

$$2K_1 t \sqrt{1-t^2} + K_2 (2t^2 - 1) + \frac{1}{4} \operatorname{Arccos} t.$$

IV

Résolution de l'équation complète

79. → Principe de superposition

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation complète (13) est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  dirigé par l'espace  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation homogène (14).

80. Méthode de variation des constantes

Nous supposons que l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation homogène (14) est connu. Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation complète.

80.1 Soient  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ , une base de  $E$  et  $x \in E$ . Il existe une, et une seule, famille de scalaires  $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot u_k$$

et les formules de Cramer donnent une expression explicite des coordonnées  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

80.2 Soient  $f_1, \dots, f_n$ , des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $E$  telles que la famille  $(f_1(t), \dots, f_n(t))$  soit une base de  $E$  pour tout  $t \in I$ . Alors, pour toute application  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ , il existe une, et une seule, famille  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  d'applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) f_k(t).$$

80.3 → Soit  $(f_1, \dots, f_n)$ , une base de  $\mathcal{S}_H$ . Toute solution de l'équation complète (13) a une expression de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) f_k(t)$$

où les fonctions  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  appartiennent à  $\mathcal{C}^1(I, E)$ .

81. Matrices fondamentales

On considère ici les versions matricielles, relatives à une base  $\mathcal{B}$  (fixée) de l'espace des phases  $E$ , de l'équation différentielle (13) :

$$(19) \quad \forall t \in I, \quad X'_t = A_t X_t + B_t$$

et de l'équation homogène (14) qui lui est associée :

$$(20) \quad \forall t \in I, \quad X'_t = A_t X_t.$$

81.1 ↯ Une application matricielle  $[t \mapsto M_t]$  est dite **matrice fondamentale** lorsqu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathcal{S}_H$  telle que

$$M_t = \mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

pour tout  $t \in I$ .

81.2 Une matrice fondamentale  $M$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall t \in I, \quad M'_t = A_t M_t.$$

81.3 L'application  $[t \mapsto X_t]$  est une solution de l'équation homogène (20) si, et seulement si, il existe une matrice fondamentale  $M$  et une matrice colonne  $\Lambda \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que

$$\forall t \in I, \quad X_t = M_t \Lambda.$$

81.4 S'il existe une application  $[t \mapsto \Lambda_t]$  de  $I$  dans  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que

$$\forall t \in I, \quad X_t = M_t \Lambda_t,$$

alors l'application  $[t \mapsto X_t]$  est une solution de l'équation complète (19) si, et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad \Lambda'(t) = M_t^{-1} B_t.$$

81.5 → Si  $[t \mapsto M_t]$  est une matrice fondamentale, alors la solution de l'équation complète (19) qui vérifie la condition initiale  $(t_0, X_0)$  a pour expression

$$X_t = M_t M_{t_0}^{-1} X_0 + \int_{t_0}^t M_t M_s^{-1} B_s ds$$

pour tout  $t \in I$ .

Exemples

82. Oscillations forcées [64]

Par variation des constantes à partir de la matrice fondamentale

$$M_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

les solutions de l'équation forcée  $x''(t) + x(t) = \varphi(t)$  sont de la forme :

$$K_1 \cos t + K_2 \sin t + \int_{t_0}^t \varphi(s) \sin(t-s) ds.$$

Expliciter la solution telle que  $x(0) = x'(0) = 0$ .

Expliciter l'intégrale pour  $\varphi(t) = \tan t$ ; pour  $\varphi(t) = \tan^2 t$ .

83. L'équation différentielle

$$t^2 x''(t) - 2t x'(t) + 2x(t) = t - 2$$

admet la matrice

$$\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

pour matrice fondamentale. Par variation des constantes, la solution générale sur  $I = ]0, +\infty[$  a pour expression :

$$-(1+t \ln t) + K_1 t + K_2 t^2.$$

Entraînement

84. Questions pour réfléchir

1. Suite de [80] – Justifier le nom de la méthode.
2. Que dire du déterminant d'une matrice fondamentale ?

85. Suite de [72] –

1. L'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t x''(t) - x'(t) - 4t^3 x(t) = 4t^3$$

admet une solution particulière évidente : laquelle ?

2. L'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t x''(t) - x'(t) - 4t^3 x(t) = 4t^5$$

admet une solution particulière polynomiale : laquelle ?

3. Pour chacune des deux équations précédentes, préciser quels sont les triplets  $(t_0, x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$  pour lesquels l'équation différentielle admet une, et une seule, solution de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $x(t_0) = x_0$  et  $x'(t_0) = v_0$ .

86. Suite de [69.1] – Résoudre  $(1+t^2)x''(t) - 2x(t) = t$ .

87. Suite de [69.2] – L'équation différentielle

$$(1+t^2)x''(t) - 2tx'(t) - 2\frac{1-t^2}{1+t^2}x(t) = 1$$

admet  $\frac{1}{2}(1+t^2) \operatorname{Arctan}^2 t$  pour solution particulière.

88. Suite de [70.1] – L'équation différentielle

$$(1+t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

admet

$$\frac{t \operatorname{Arctan} t}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)}$$

pour solution particulière.

89. Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , monotone et bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , alors les solutions [82] de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x''(t) + x(t) = f(t)$$

sont bornées sur  $\mathbb{R}_+$ .

**90. Variation de la constante**

On étudie une équation différentielle linéaire du second ordre en supposant connue une solution particulière  $f$  de l'équation homogène.

La méthode de variation de la constante [67] peut aussi servir à calculer la solution générale de l'équation complète sous la forme  $g(t) = K(t)f(t)$ .

**90.1** L'équation différentielle homogène

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0$$

admet des solutions de la forme  $f(t) = t^A$ .

La fonction  $g$  est solution de l'équation

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + tx'(t) - x(t) = t$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{A}{t} + Bt + \frac{1}{2}t \ln t.$$

En particulier, aucune solution n'est développable en série entière au voisinage de l'origine [24.2].

**90.2** Les solutions de l'équation homogène

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0$$

sont polynomiales [83].

La fonction  $g$  est une solution de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t^3 \cos t$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = At + Bt^2 - t \cos t.$$

Comment la singularité en  $t = 0$  se manifeste-t-elle ?

**90.3** L'équation différentielle homogène

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad (1 - t^2)x''(t) - 3tx'(t) - x(t) = 0$$

admet  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  pour solution particulière.

La fonction  $g$  est solution de l'équation

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad (1 - t^2)x''(t) - 3tx'(t) - x(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad g(t) = \frac{A + B \operatorname{Arctan} t - t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

**91. Une équation intégrale**

1. Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$(21) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3 \operatorname{Arctan} t + t^2 f(t) = 2t \int_1^t f(s) ds,$$

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et vérifie l'équation différentielle

$$(22) \quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad t^2 x''(t) + 2tx'(t) - 2x(t) = \frac{6t}{(1+t^2)^2}.$$

En outre,  $f(1) = -3\pi/4$  et  $f'(1) = -3/2$ .

2. L'équation homogène associée à (22) admet

$$M_t = \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} t^4 & t \\ t^3 & -2 \end{pmatrix}$$

pour matrice fondamentale. En posant

$$\Lambda'(t) = M_t^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{t(1+t^2)^2} \end{pmatrix},$$

on obtient une solution particulière de (22) :

$$g_0(t) = -t \ln(1+t^2) + t \ln(t^2) + \frac{1}{t} - \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}.$$

3. L'unique solution de (21) :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t) = g_0(t) + (\ln 2 - 1 - \pi/2)t$$

n'est pas dérivable en  $t = 0$ .

**Cas des coefficients constants**

**92.** L'expression [101] des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants en dimension  $n$  reprend, en la généralisant, l'expression [5] des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants en dimension 1 : on remplace l'exponentielle d'un nombre réel ou complexe par l'exponentielle d'une matrice carrée.

**V.1 Exponentielle de matrice**

**93.** Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . On pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|.$$

**93.1** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $a_k(i, j)$ , le coefficient de  $A^k$  situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne. Alors

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |a_k(i, j)| \leq n^{k-1} \|A\|_\infty^k$$

et la série de terme général  $a_k(i, j)/k!$  est absolument convergente.

**93.2** L'exponentielle de la matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est la matrice définie par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

au sens où le coefficient situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne de  $\exp(A)$  est égal à la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(i, j)}{k!}.$$

**93.3** Si  $A = \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ , alors

$$\exp(A) = \operatorname{Diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}).$$

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tI_n) = e^t \cdot I_n.$$

**93.4**  $\rightarrow$  Si  $B = Q^{-1}AQ$ , alors  $\exp(B) = Q^{-1} \exp(A)Q$ .

**94.** L'exponentielle des matrices possède des propriétés analogues à celles de l'exponentielle complexe. On reprend les notations de [93].

**94.1** Soient  $1 \leq i, j \leq n$ . Le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k a_k(i, j)$$

est infini.

**94.2**  $\rightarrow$  **Dérivation**

L'application  $[t \mapsto \exp(tA)]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{d[\exp(tA)]}{dt} = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

**94.3**  $\rightarrow$  **Propriété de morphisme (admise)**

Quels que soient les réels  $s$  et  $t$ ,

$$\exp(sA) \exp(tA) = \exp[(s+t)A] = \exp(tA) \exp(sA).$$

**95. Exemples**

**95.1** Si  $A^2 = I_n$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \operatorname{ch} t I_n + \operatorname{sh} t A.$$

**95.2** Si  $A^2 = -I_n$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \cos t I_n + \sin t A.$$

95.3 Si  $A^3 = A^2$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = I + tA + (e^t - 1 - t)A^2 \\ = (I - A^2) + t(A - A^2) + e^t A^2.$$

95.4 Si  $A^3 = -A^2$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = I + tA + (e^{-t} - 1 + t)A^2 \\ = (I - A^2) + t(A + A^2) + e^{-t} A^2.$$

95.5 Si la matrice  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$  est triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

95.6 Si la matrice  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$  est diagonalisable et semblable à  $\text{Diag}(\lambda, \mu)$ , alors, quel que soit  $X_0 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ , il existe deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA)X_0 = \begin{pmatrix} \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} \\ * \end{pmatrix}.$$

## V.2 Résolution d'une équation différentielle à coefficients constants

96. On considère ici les équations différentielles qu'on peut écrire matriciellement sous la forme

$$\forall t \in I, \quad X'_t = AX_t + B_t$$

où  $A$  est une matrice fixée de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et  $[t \mapsto B_t]$ , une fonction continue de  $I$  dans l'espace des phases  $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

### Résolution de l'équation homogène

97. → **Théorème de Cauchy linéaire**

Quels que soient  $t_0 \in I$  et  $U_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, X'_t = AX_t \\ X_{t_0} = U_0 \end{cases}$$

admet une, et une seule, solution. Cette solution a pour expression :

$$\forall t \in I, \quad X_t = \exp[(t - t_0)A]U_0.$$

98. → **Matrice fondamentale**

Soit  $(U_1, \dots, U_n)$ , une famille de vecteurs de l'espace des phases  $E$ . La famille des applications

$$[t \mapsto \exp(tA)U_k] \quad (1 \leq k \leq n)$$

est un système fondamental de solutions de l'équation homogène

$$\forall t \in I, \quad X'_t = AX_t$$

si, et seulement si, la famille  $(U_1, \dots, U_n)$  est une base de  $E$ .

99. Soit  $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$  une base de  $E$ . La matrice fondamentale

$$\mathfrak{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(tA)U_1, \dots, \exp(tA)U_n)$$

est égale à  $\exp(tA)$ .

100. ▷ **Wronskien [65.2]**

Soient  $\mathcal{B}$  et  $(U_1, \dots, U_n)$ , deux bases de l'espace des phases. Le wronskien relatif à  $\mathcal{B}$  du système fondamental de solutions

$$\left( [t \mapsto \exp(tA)U_k] \right)_{1 \leq k \leq n}$$

est égal à

$$\det_{\mathcal{B}}(U_1, \dots, U_n) \exp(t \text{tr}(A)).$$

### Résolution de l'équation complète

101. → L'expression de la solution de l'équation complète

$$\forall t \in I, \quad X'_t = AX_t + B_t$$

qui vérifie la condition initiale  $(t_0, U_0)$  est donnée par :

$$X_t = \exp[(t - t_0)A]U_0 + \int_{t_0}^t \exp[(t - s)A]B_s \, ds$$

pour tout  $t \in I$ .

### Applications

102. Suite de [46.3] –

$$\exp \begin{pmatrix} 4t & -2t \\ t & t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

103.1 Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp \begin{pmatrix} t & 8t \\ 2t & t \end{pmatrix} = \frac{1}{4}e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}e^{5t} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

103.2 Une solution particulière du système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^{-3t}}{16} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{te^{-3t}}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

103.3 Le couple de fonctions  $(x_0, y_0)$  est solution du système homogène associé si, et seulement si, il existe deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{5t} \\ K_2 e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

### Entraînement

104. **Questions pour réfléchir**

1. Suite de [100] – Avec  $\mathcal{B} = (U_1, \dots, U_n)$  à  $t = 1$ ,

$$\det(\exp A) = \exp(\text{tr} A).$$

2. Comparer [101] et [4].

105.1 Suite de [95.3] – Si

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\ + e^t \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -6 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

105.2 Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

105.3 On pose  $B = A - I_3$  où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp(tA) = e^t \exp(tB)$ .
2. Les projections associées à la décomposition

$$\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(B - I_3) \oplus \text{Ker}(B^2 + I_3)$$

sont

$$P_1 = \frac{1}{2}(B^2 + I_3) \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}(I_3 - B^2)$$

et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tB) = e^t P_1 + \cos t P_2 + \sin t B P_2.$$

106. L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

106.1 Soient  $u \in \mathbb{R}^3$ , non nul, et  $a \in L(\mathbb{R}^3)$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad a(x) = u \wedge x.$$

Il existe une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle l'endomorphisme  $a$  est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad k = \|u\|.$$

106.2 Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos kt & -\sin kt \\ 0 & \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

106.3 Interpréter le résultat précédent à l'aide de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = u \wedge x(t).$$

107. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \frac{e^{3t}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2te^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les plans stables par  $A$  sont  $[y - z = 0]$  et  $[y + z = 0]$ . La trajectoire de la solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t)$$

telle que  $X'(0) = \langle 1, 1, 1 \rangle$  est contenue dans le plan  $[y - z = 0]$ .

108.1 Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

on a  $P^{-1}AP = B$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tB) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

108.2 Une fonction  $x$  est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x^{(3)}(t) - 5x''(t) + 7x'(t) - 3x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe trois réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = (\alpha + \beta t)e^t + \gamma e^{3t}.$$

## Questions, exercices & problèmes

### Perfectionnement

109. Exemples et contre-exemples

1. Exemple d'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre admettant une solution  $\varphi$  non identiquement nulle sur  $I = ]a, b[$  et qui tend vers  $0_E$  au voisinage de  $b$ .

110. Méthodes

1. Comment trouver efficacement les solutions polynomiales d'une équation différentielle?

2. Exemples de méthodes permettant de calculer une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

3. Comment résoudre une équation différentielle de la forme suivante?

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$$

### Approfondissement

111. Perturbation des coefficients

L'équation caractéristique admet le réel  $\lambda$  pour racine double si, et seulement si, l'équation différentielle s'écrit :

$$x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x = 0.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(t) = \frac{e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t}}{\varepsilon}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$x'' - (2\lambda + \varepsilon)x' + \lambda(\lambda + \varepsilon)x = 0.$$

Que dire de  $f_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0?

112. Si  $(x, y)$  est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

alors  $x$  est une solution de  $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$ . Le couple  $(x, y)$  est une solution si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^t(A + Bt), \quad y(t) = x(t) + Be^t.$$

113. Soit  $f$ , une fonction continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $F$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = -e^t \int_t^{+\infty} e^{-s} f(s) ds$$

est l'unique solution bornée sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) - x(t) = f(t).$$

La fonction  $F$  tend vers 0 aux voisinages de  $-\infty$  et de  $+\infty$ . Elle est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

**114. Séries de Fourier**

On suppose que la série  $\sum a_n$  est absolument convergente.

1. Si  $\omega$  est un réel strictement positif *non entier*, alors l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + \omega^2 x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nt$$

admet pour solution la fonction  $f$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos nt.$$

2. Étudier le cas où  $\omega \in \mathbb{N}^*$ .

**115.**

1. Il existe une fonction continue  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'équation différentielle

$$(23) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + \lambda(t)y'(t) + y(t) = 0$$

admette  $f(t) = t/\operatorname{ch} t$  pour solution. Les solutions de (23) sont alors de la forme

$$\frac{K_1 + K_2 t}{\operatorname{ch} t}.$$

**116. Parité d'un système fondamental**

On considère l'équation différentielle

$$(24) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**116.1** On suppose que  $a$  est impaire et que  $b$  est paire.

1. Si  $f$  est une solution qui n'est ni paire, ni impaire, alors  $g = [t \mapsto f(-t)]$  est une solution de (24).

2.a Le wronskien de (24) est une fonction paire.

2.b Si l'équation (24) admet une solution paire (resp. impaire) non identiquement nulle, alors elle admet aussi une solution impaire (resp. paire) non identiquement nulle.

3. Toute solution de l'équation (24) est combinaison linéaire d'une solution paire et d'une solution impaire.

**116.2** Si l'équation (24) admet une matrice fondamentale de la forme

$$M_t = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}$$

où  $f$  est une solution paire et  $g$ , une solution impaire, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (b(t) - b(-t) \quad a(t) + a(-t)) M_t = (0 \quad 0)$$

donc  $a$  est impaire et  $b$  est paire.

**117.** L'équation

$$tx'(t) - x(t) = \frac{t}{1+t^2}$$

présente une singularité en  $t = 0$ . Sur les deux intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ , les solutions s'expriment sous la forme

$$t \left[ \lambda + \ln|t| - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right].$$

Il n'y a pas de solution sur  $\mathbb{R}$ .

**118. Changements de variable**

**118.1** Soit  $\alpha$ , un nombre réel. Si  $x$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que

$$(E_\alpha) \quad \forall t \in I = ]-1, 1[, \quad (1-t^2)x''(t) - \alpha tx'(t) + \alpha x(t) = 0,$$

on définit une fonction  $y$  en posant

$$\forall t \in I, \quad x(t) = y(\varphi(t))$$

où  $\varphi$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  sur un intervalle  $J$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$  la fonction  $y$  est-elle solution d'une équation différentielle à coefficients constants?

Résoudre l'équation  $(E_\alpha)$  dans ce cas.

**118.2** Toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = f(1/t)$$

est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad t^2 x''(t) + x(t) = 0.$$

La fonction  $g$  définie par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g(s) = f(e^s)$$

est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et  $g(0) = g'(0)$ . Il existe donc une constante  $A$  telle que

$$\forall t > 0, \quad f(t) = A\sqrt{t} \left[ \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3} \ln t}{2} + \sin \frac{\sqrt{3} \ln t}{2} \right].$$

**119.** L'équation homogène associée à

$$(*) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t)x''(t) - 2x'(t) + (1-t)x(t) = te^{-t}$$

admet  $\exp$  pour solution particulière. à quelle condition sur  $k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  la fonction  $x(t) = k(t)e^t$  est-elle une solution de l'équation  $(*)$ ?

Les solutions de  $(*)$  sont les fonctions de la forme

$$\left( \frac{1+t}{2} \right) e^{-t} - K_1 (2t^2 + 6t + 5) e^{-t} + K_2 e^t.$$

Étudier la singularité en  $t = -1$ .

**120.** Une fonction  $x$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^2$  de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = t^3 \cos t$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = At + Bt^2 + t(1 - \cos t).$$

En particulier, toutes les solutions sont développables en série entière. Étudier la singularité en  $t = 0$ .

**Pour aller plus loin**

**121.1** Suite de [22] – Soit  $f$ , une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + e^t x(t) = 0.$$

1. Soient  $a$  et  $b$ , deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $g$ , une solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + e^a x(t) = 0.$$

1.a S'il existe deux nombres réels  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  tels que  $g(\alpha) = g(\beta) = 0$  et que les deux fonctions  $f$  et  $g$  restent strictement positives sur  $] \alpha, \beta[$ , alors la fonction  $W$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$$

est croissante sur  $[\alpha, \beta]$  tandis que  $W(\alpha) > 0$  et  $W(\beta) < 0$ .

1.b Entre deux zéros consécutifs de  $g$  se trouve au moins un zéro de  $f$ .

2. Pour tout réel  $\tau$ , la fonction  $f$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $[\tau, \tau + \pi \exp(-\tau/2)]$ .

121.2 On étudie les solutions réelles de l'équation différentielle

$$(*) \quad \forall t \in I, \quad x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des fonctions continues de l'intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ , une solution de  $(*)$ . S'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $f(t_0) = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle sur  $I$  si, et seulement si,  $f'(t_0) = 0$ .

4. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ , une solution non identiquement nulle de l'équation homogène  $(*)$ .

4.a S'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $f(t_0) = 0$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $f(t) \neq 0$  pour tout  $t \in ]t_0 - r, t_0 + r[$ .

4.b Pour tout segment  $[a, b] \subset I$ , la fonction  $f$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur  $[a, b]$ . Il est donc légitime de parler des **zéros consécutifs** de  $f$ .

5. On considère maintenant un système fondamental  $(f, g)$  de solutions de  $(*)$ . Le wronskien de ce système est noté  $W$ .

5.a Les fonctions  $f$  et  $g$  ne s'annulent jamais au même instant.

5.b Si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux zéros consécutifs de  $f$  et si  $f$  est strictement positive sur  $]t_1, t_2[$ , alors  $f'(t_1)$  et  $f'(t_2)$  sont de signes opposés et  $g$  s'annule au moins une fois entre  $t_1$  et  $t_2$ .

5.c Par symétrie, la fonction  $g$  s'annule une fois, et une seule, entre deux zéros consécutifs de  $f$ .

5.d On suppose que  $f$  s'annule exactement  $n$  fois sur l'intervalle  $I$ . Combien de fois la fonction  $g$  s'annule-t-elle ?

121.3 Une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I = ]0, +\infty[$  est une solution de l'équation différentielle homogène

$$\forall u > 0, \quad y''(u) + \frac{2}{u}y'(u) + \frac{1}{u^4}y(u) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall u > 0, \quad y(u) = A \sin \frac{1}{u} + B \cos \frac{1}{u}.$$

(Considérer  $x(t) = y(1/t)$ .)

Pour  $(A, B) \neq (0, 0)$ , cette fonction  $f$  n'est pas identiquement nulle mais elle admet une infinité de zéros au voisinage de 0. Cela ne contredit pas l'étude précédente car  $0 \notin I$ .

## 122. Matrice résolvante

122.1 Soit  $[t \mapsto M_t]$ , une matrice fondamentale. La matrice résolvante  $R_{s,t}$  est définie par

$$R_{s,t} = M_s M_t^{-1}$$

pour tous  $s$  et  $t$  dans  $I$ .

1. Exprimer la matrice résolvante relative à une base  $\mathcal{C}$  de  $E$  en fonction de la matrice résolvante relative à une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et de la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .

2. Comparer les matrices résolvantes associées à deux matrices fondamentales  $[t \mapsto M_t]$  et  $[t \mapsto N_t]$  d'une même équation homogène.

3. Expression de la matrice résolvante de l'équation homogène  $X_t' = AX_t$ .

## 123. Lemme de Gronwall

### 123.1 Démonstration du lemme

Soient  $f$  et  $g$ , deux fonctions continues et positives, définies sur un même intervalle  $I$ . On suppose qu'il existe un instant  $t_0 \in I$  et une constante  $k \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq k + \left| \int_{t_0}^t g(s)f(s) ds \right|.$$

1. L'hypothèse précédente est vérifiée lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = [a, b]$  et que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) \leq g(t)f(t).$$

2. La fonction  $u$  définie par

$$\forall t \geq t_0, \quad u(t) = k + \int_{t_0}^t g(s)f(s) ds$$

et par

$$\forall t \leq t_0, \quad u(t) = k - \int_{t_0}^t g(s)f(s) ds$$

est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  privé de  $t_0$ .

3. La fonction  $v$  définie sur  $I$  par

$$\forall t \geq t_0, \quad v(t) = u(t) \exp \left[ - \int_{t_0}^t g(s) ds \right]$$

et par

$$\forall t \leq t_0, \quad v(t) = u(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t g(s) ds \right]$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  privé de  $t_0$ , décroissante sur  $I \cap [t_0, +\infty[$  et croissante sur  $I \cap ]-\infty, t_0]$ .

4.

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq k \exp \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right|.$$

## 123.2 Applications

5. Soient  $a$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f$ , une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x''(t) + [1 + a(t)]x(t) = 0.$$

Alors [82] la fonction  $g$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g(t) = f(t) + \int_0^t \sin(t-s)a(s)f(s) ds$$

vérifie  $x'' + x = 0$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(t)| \leq C \exp \int_0^t |a(s)| ds.$$

6. Soit  $E$ , un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère deux applications continues  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  ainsi que deux solutions  $\varphi : I \rightarrow E$  et  $\psi : I \rightarrow E$  de l'équation

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

On admet qu'il existe une fonction continue  $K$  telle que

$$\forall s \in I, \forall x \in E, \quad \|a(s)x\|_E \leq K(s)\|x\|_E.$$

Alors, pour tout  $t \in I$ ,

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\|_E \leq \|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\|_E \exp \left| \int_{t_0}^t K(s) ds \right|.$$

Que déduire du lemme de Gronwall si  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$  ?

7. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de vecteurs de  $E$  qui converge vers  $x_0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que le problème de Cauchy :

$$x(t_0) = u_n \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)x(t)$$

admet une solution notée  $\varphi_n$ .

La suite de fonctions  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $\varphi$  continue sur  $I$  et telle que

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s)\varphi(s) ds.$$

## 124. L'équation différentielle

$$(\ddagger) \quad y'(t) - 2ty(t) + 2ty^2(t) = 0$$

admet exactement deux solutions constantes sur  $\mathbb{R}$ .

Si la fonction  $y$  est une solution de  $(\ddagger)$  qui ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $x = 1/y$  vérifie

$$\forall t \in I, \quad x'(t) + 2tx(t) = 2t$$

donc il existe une constante  $A$  telle que

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-t^2}}.$$

Le principe de superposition peut-il s'appliquer à  $(\ddagger)$  ?