Espaces euclidiens (deuxième partie)

1. ✍ *Un* **espace euclidien** *est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

2. Dans la suite de ce chapitre, $\big(E, (\cdot\,|\,\cdot)\big)$ désigne toujours un espace euclidien.

3. Rappels sur la réduction des endomorphismes
Soit $u \in L(E)$.
3.1 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels stables par u, alors $F+G$ et $F \cap G$ sont stables par u.
3.2 Si le sous-espace F est stable par l'endomorphisme u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par l'adjoint u^*.
3.3 Si u est inversible, alors u^{-1} est un polynôme en u et u est un polynôme en u^{-1} :

$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u], \qquad u \in \mathbb{K}[u^{-1}].$$

3.4 Si P est un polynôme annulateur de u, irréductible et unitaire, alors P est le polynôme minimal de u.
3.5 Si le produit PQ est un polynôme annulateur de u et si $P(u)$ est injectif, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (PQ)(u)(x) = 0_E = P(u)\big(Q(u)(x)\big)$$

et Q est un polynôme annulateur de u.
3.6 Si P est un diviseur non constant du polynôme minimal de u, alors le sous-espace $\operatorname{Ker} P(u)$ contient un vecteur $x_0 \neq 0_E$.
3.7 L'endomorphisme u n'a pas de vecteur propre dans le sous-espace vectoriel

$$F = \Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E)\Big)^\perp.$$

Par suite, si F est stable par u, alors le spectre de l'endomorphisme u_F induit par restriction de u à F est vide.

Entraînement

4. Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E, alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} (F^\perp \cap G^\perp).$$

On peut exprimer les trois projections relatives à cette décomposition en somme directe en fonction d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de G.

5. Soit $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille de vecteurs de E. Les formes linéaires $\varphi_k = [x \mapsto (\,y_k\,|\,x\,)]$ sont liées dans l'espace dual $E^* = L(E,\mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est liée et $\operatorname{rg}(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r} = \operatorname{rg}(y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$.

6. Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$, une base de $E = \mathbb{R}_d[X]$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telles que $\|P_n\|$ tende vers 0.

1. $$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad (\,\varepsilon_k\,|\,P_n\,) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} (\,\varepsilon_k\,|\,P_n\,)\,\varepsilon_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

I

Réductions des isométries

I.1 Rappels

7. Un endomorphisme u de E est une ***isométrie*** (ou un ***automorphisme orthogonal***) lorsque

$$\forall\, x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|.$$

7.1 ➙ *Un endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, il conserve le produit scalaire :*

$$\forall\, (x,y) \in E\times E, \quad \big(\,u(x)\,\big|\,u(y)\,\big) = (\,x\,|\,y\,).$$

7.2 Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale*** si, et seulement si,

$$M^\top.M = I_n$$

c'est-à-dire si

$$M.M^\top = I_n.$$

7.3 ➙ *Soit $u \in L(E)$, représenté par la matrice M dans une base orthonormée de E. L'endomorphisme u est une isométrie si, et seulement si, la matrice M est orthogonale.*
7.4 ➙ **Caractérisations des matrices orthogonales**
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.
1. *La matrice M est orthogonale.*
2. *La matrice M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.*
3. *La matrice M représente une isométrie dans une base orthonormée de E.*
4. *La matrice M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.*
5. *Les colonnes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*
6. *Les lignes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*

7.5 Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'une isométrie) est égal à ± 1. Les ***rotations*** sont les isométries dont le déterminant est égal à 1.

8. ➙ **Stabilité de l'orthogonal [5.103.3]**
Si u est une isométrie de E et si V est un sous-espace stable par u, alors l'orthogonal $V^\perp$ est stable par u.

9. Spectre d'une isométrie
9.1 ➙ *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in O(E)$, alors $\lambda = \pm 1$.*
9.2 Considérée comme une matrice *réelle*, une matrice orthogonale ne peut admettre comme valeurs propres que 1 et -1.
9.3 Les valeurs propres d'une matrice orthogonale considérée comme une matrice *complexe* sont des nombres complexes de module 1.

10. Soit $u \in O(E)$.
On considère les sous-espaces vectoriels

$$V_+ = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \quad \text{et} \quad V_- = \operatorname{Ker}(u + \mathrm{I}_E).$$

10.1 Les sous-espaces vectoriels V_+ et V_- sont orthogonaux.
10.2 Les sous-espaces

$$V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \quad \text{et} \quad F = \big(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-\big)^\perp$$

sont stables par u.
10.3 Si x est un vecteur non nul de F, alors le sous-espace $\operatorname{Vect}(x, u(x))$ est un plan.
10.4 Si $\dim E = 3$, alors $\dim F \leqslant 2$.

I.2 Isométries en dimension $n \geqslant 3$

11. *Suite de* [**10**] – Le sous-espace $F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$ est stable par u. On suppose qu'il existe un entier k tel que $2k \leqslant \dim F$ et des plans $P_1, \dots, P_k$ contenus dans F, deux à deux orthogonaux et stables par u.

11.1 Si G est un sous-espace vectoriel de F, alors

$$F = G \overset{\perp}{\oplus} (V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G)^\perp.$$

11.2 Si $\dim F > 2k$, alors le sous-espace vectoriel

$$F_{k+1} = \big[(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-) \overset{\perp}{\oplus} (P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k)\big]^\perp$$

est stable par u [**5.103.3**] et contenu dans F, donc $\dim F \geqslant 2k+2$.

11.3 Dans ce cas, l'endomorphisme u_{k+1} induit par restriction de u à F_{k+1} est une isométrie qui n'a pas de valeurs propres réelles et son polynôme minimal admet un diviseur μ_{k+1} irréductible de degré 2.

11.4 Si x_{k+1} est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big(\mu_{k+1}(u_{k+1})\big)$, alors

$$P_{k+1} = \mathrm{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est un plan stable par u, contenu dans F et orthogonal aux plans $P_1, \dots, P_k$.

12. ➙ *Soit $u \in O(E)$. Il existe des plans vectoriels $P_1, \dots, P_d$, stables par u et deux à deux orthogonaux tels que*

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(u + \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \Big(\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant d}} P_k\Big).$$

13. ➙ **Traduction matricielle**
En notant $p = \dim V_+$ et $q = \dim V_-$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E et des réels $0 < \omega_1, \dots, \omega_d < \pi$ tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Diag}\big(I_p, -I_q, R(\omega_1), \dots, R(\omega_d)\big).$$

L'entier q est pair si, et seulement si, u est une rotation.

Classifications des isométries vectorielles de l'espace

14. **Selon la dimension du sous-espace fixe**

14.1 Si $\dim E = 3$, on peut classer les isométries de l'espace en fonction de la dimension du sous-espace fixe $V_+ = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E)$.

— Si $\dim V_+ = 3$, alors $u = \mathrm{I}_E$.

— Si $\dim V_+ = 2$, alors u est une réflexion représentée dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

— Si $\dim V_+ = 1$, alors u est une rotation et il existe un angle $0 < \theta \leqslant \pi$ tel que la matrice de u soit

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée convenable.

— Si $\dim V_+ = 0$, alors il existe $0 < \theta \leqslant \pi$ tel que, dans une base orthonormée convenable, la matrice de u soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Cette isométrie est la composée d'une rotation et d'une réflexion qui commutent.

14.2 **Isométries diagonalisables**
En dimension 3, les isométries diagonalisables sont les suivantes.

— L'identité I_E.

— Les réflexions.

— Les rotations d'angle $\theta = \pi$, c'est-à-dire les ***demi-tours d'axe*** V_+, appelés aussi ***symétries axiales***.

— La ***symétrie centrale*** $-\mathrm{I}_E$.

15. **Selon le déterminant**
Si $\dim E = 3$, on distingue :

— Les rotations ($\det u = 1$) ;

— Les réflexions et les composées d'une rotation et d'une réflexion ($\det u = -1$).

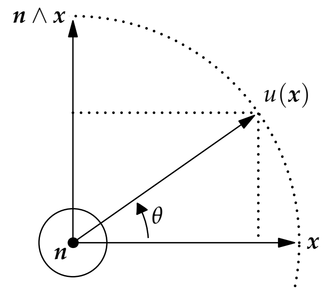
I.3 Méthodes pratiques

Matrice d'une rotation en dimension 3

16. Soient θ, un réel ; $\boldsymbol{n}$, un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 et $u \in \mathrm{SO}(E)$, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle dirigée et orientée par $\boldsymbol{n}$.

16.1 On a : $u(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}$ et

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in (\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{n})^\perp, \quad u(\boldsymbol{x}) = \cos\theta \cdot \boldsymbol{x} + \sin\theta \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$



16.2 Plus généralement,

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad u(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} + \cos\theta \cdot (\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}) + \sin\theta \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$

ce qui permet d'écrire la matrice de u dans une base orthonormée directe quelconque.

Analyse d'une rotation en dimension 3

17. Soit u, une isométrie de $\mathbb{R}^3$ représentée dans une base orthonormée directe par une matrice orthogonale $A \in O_3(\mathbb{R})$:

$$A^\top.A = I_3.$$

17.1 On vérifie qu'il s'agit d'une matrice de rotation en calculant une matrice colonne $N \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AN = N \qquad \text{et} \qquad N^\top.N = 1.$$

Cette colonne représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ qui dirige l'axe de la rotation u.
Il reste à déterminer le réel θ (unique modulo 2π) tel que u soit la rotation d'angle θ autour de la droite orientée par $\boldsymbol{n}$.

17.2 On choisit une matrice colonne $V \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{v}$ orthogonal à $\boldsymbol{n}$:

$$N^\top.V = 0, \qquad V^\top.V = 1.$$

17.3 Avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}$, la famille $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base orthonormée directe. La matrice de u relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$ et

$$\det(N, V, AV) = \det_{\mathscr{B}_0}\big(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, u(\boldsymbol{v})\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$

17.4 Une autre méthode d'étude est présentée au [**105**].

Entraînement

18. Questions pour réfléchir

1. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det M = \pm 1$ est-elle une matrice orthogonale ?

2.a La matrice I_n est une matrice de rotation.

2.b La matrice $-I_n$ est-elle une matrice de rotation ?

3. Si $\det M = 1$, la matrice M est-elle une matrice de rotation ?

4. Si $\dim E = 3$, quelles symétries orthogonales sont aussi des rotations ?

5. Une réflexion peut-elle être une rotation ?

6. Matrice d'une symétrie orthogonale relative à une base orthonormée quelconque ; à une base orthonormée adaptée aux sous-espaces propres.

7. Si une isométrie $u \in O(E)$ est diagonalisable, alors u est une symétrie.

8. Expliciter une matrice orthogonale P telle que

$$\operatorname{Diag}(1,1,-1) = P^\top.\operatorname{Diag}(-1,1,1).P.$$

Est-il possible de choisir P de telle sorte que $\det P = 1$?

9. *Suite de* **[14]** –

9.a Les matrices $R_x(\theta)$ et $R_x(-\theta)$ sont-elles semblables ?

9.b Étudier l'existence d'une matrice $P \in SO_n(\mathbb{R})$ telle que

$$R_x(-\theta) = P^\top.R_x(\theta).P.$$

Interpréter géométriquement.

10. *Suite de* **[16]** – Si $u \neq I_E$, alors il n'y a que deux couples

$$(\boldsymbol{n}, \theta) \in E \times [-\pi, \pi]$$

possibles et ils sont opposés. Interpréter géométriquement.

11. *Suite de* **[17]** – Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ et si l'équation $AN = N$ n'a que le vecteur $N = 0$ pour solution, que dire de la matrice A ?

19. Soit u, un endomorphisme de E tel que

$$u \circ u^* \circ u = u.$$

Le sous-espace $F = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme induit par restriction de u à F est une isométrie.

20. Matrices de rotation

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Les matrices suivantes représentent, dans la base canonique, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle *orientée* par le vecteur $\boldsymbol{n}$. →**[16]**, **[17]**

20.1 Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1,-1,1)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

20.2 Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1,1,0)$:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

20.3 Pour $e^{i\theta} = \frac{3+4i}{5}$ et $\boldsymbol{n} = (0,-1,2)$:

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & -8\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 8\sqrt{5} & 17 & -4 \\ 4\sqrt{5} & -4 & 23 \end{pmatrix}$$

20.4 Pour $e^{i\theta} = \frac{4+3i}{5}$ et $\boldsymbol{n} = (\sqrt{2},0,1)$:

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -3\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} & 12 & -3\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{6} & 13 \end{pmatrix}$$

20.5 Pour $\theta = \pi/6$ et $\boldsymbol{n} = (1,0,-1)$:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & -2+\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

20.6 Pour $\theta = 2\pi/3$ et $\boldsymbol{n} = (1,0,2)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{15} & 6 \\ 2\sqrt{15} & -5 & -\sqrt{15} \\ 6 & \sqrt{15} & 7 \end{pmatrix}$$

20.7 Pour $\theta = \pi/2$ et $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

20.8 Pour $e^{i\theta} = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$ et $\boldsymbol{n} = (0,1,1)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & 5+\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{10} & 5-\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

20.9 Pour $\theta = 3\pi/4$ et $\boldsymbol{n} = (-2,0,1)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-\sqrt{2} & -\sqrt{10} & -4-2\sqrt{2} \\ \sqrt{10} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{10} \\ -4-2\sqrt{2} & -2\sqrt{10} & 2-4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

21. Soient $u \in O(E)$ et $v = u - I_E$.

21.1 Comme $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$, pour tout vecteur $x \in E$, il existe deux vecteurs $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in E$ tels que

$$x = y + v(z) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|v(z)\|^2.$$

Le couple (y, z) est-il unique ? Que valent $u(y)$ et $\|u(z)\|$?

21.2 La suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)$$

converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

22. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1+\theta\cos 2\theta & -\theta\sin 2\theta \\ -\theta\sin 2\theta & 1-\theta\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

23. Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telles que

$$A^\top.A = B^\top.B.$$

On note f (resp. g), l'application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ canoniquement associée à la matrice A (resp. à la matrice B). Les espaces $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives.

23.1 Quels que soient les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^q$,

$$\langle f(x) \,|\, f(y) \rangle = \langle g(x) \,|\, g(y) \rangle.$$

23.2 Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont égaux.

23.3 Si $\big(f(x_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$, alors $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^q$ et $\big(g(x_k)\big)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

23.4 Il existe une matrice orthogonale $U \in O_p(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

II

Théorème spectral

24. Rappels
On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté $(\cdot\,|\,\cdot)$.
24.1 L'***adjoint*** d'un endomorphisme u de E est l'unique endomorphisme u^* de E tel que

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \big(x\,\big|\,u(y)\big) = \big(u^*(x)\,\big|\,y\big).$$

24.2 Un endomorphisme u de E est dit ***auto-adjoint*** (ou ***symétrique***) lorsqu'il est égal à son adjoint u^*, c'est-à-dire :

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \big(u(x)\,\big|\,y\big) = \big(x\,\big|\,u(y)\big).$$

24.3 En général, un projecteur p possède deux sous-espaces propres : son noyau

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(p - 0\cdot \mathrm{I}_E) = \operatorname{Im}(\mathrm{I}_E - p)$$

et son image

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - p) = \operatorname{Ker}(p - 1\cdot \mathrm{I}_E).$$

Ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

et la décomposition de chaque vecteur est connue :

$$\forall\,x\in E,\qquad x = \big[x - p(x)\big] + p(x).$$

24.4 Par définition, un projecteur $p \in \mathrm{L}(E)$ est une ***projection orthogonale*** si, et seulement si, les deux sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ker} p \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{I}_E)$$

sont orthogonaux. On connaît alors une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(p - \mathrm{I}_E).$$

Propriétés des endomorphismes auto-adjoints

25. ➙ *Un projecteur $p \in \mathrm{L}(E)$ est une projection orthogonale si, et seulement si, l'endomorphisme p est auto-adjoint.*

26. ➙ *S'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u, alors u est un endomorphisme auto-adjoint.*

27. Sous-espaces stables
27.1 ➙ *L'endomorphisme induit par restriction de $u \in \mathcal{S}(E)$ à un sous-espace F stable par u est un endomorphisme auto-adjoint de F.*
27.2 Si $u(x)$ et y sont orthogonaux, alors x et $u(y)$ sont orthogonaux.
27.3 ➙ *Si u est un endomorphisme auto-adjoint de E, alors*

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u.$$

27.4 ➙ *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux.*

27.5 ➙ *Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u.*

28. Polynôme minimal
28.1 On considère une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et un vecteur propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de M associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \overline{X}^\top.X = \overline{(MX)}^\top.X = X^\top.\overline{(MX)} = \overline{\lambda} X^\top.\overline{X}$$

28.2 ➙ *Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.* →**[57]**

Versions géométriques du théorème spectral

29. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
29.1 Si V est un sous-espace stable par u de dimension supérieure à 1, alors il contient un vecteur propre de u.
29.2 Si $V_1, \dots, V_r$ sont les sous-espaces propres de u, alors le sous-espace

$$F = \Big[V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_r\Big]^\perp$$

est stable par u mais ne contient aucun vecteur propre de u.
29.3 ➙ *Tout endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien E est diagonalisable et*

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}} \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E).$$

29.4 Décomposition spectrale
Pour tout endomorphisme auto-adjoint u,

$$u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\cdot p_\lambda$$

où p_λ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E)$, sous-espace propre de u associé à λ. →**[34.3]**

Versions vectorielles du théorème spectral

30. Rappels
Si un endomorphisme u de E est auto-adjoint, alors la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique, quelle que soit la base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.
Réciproquement, s'il existe au moins une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique, alors l'endomorphisme u est auto-adjoint.
31. ➙ *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.*
32. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une base orthonormée de vecteurs propres de u. On suppose que les valeurs propres de u sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

32.1 Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} (\,\varepsilon_k\,|\,x\,)\cdot\varepsilon_k \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(\,\varepsilon_k\,|\,x\,)\cdot\varepsilon_k.$$

32.2 Comme

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\,\varepsilon_k\,|\,x\,)^2,$$

alors

$$\lambda_1\,\|x\|^2 \leqslant \big(x\,\big|\,u(x)\big) \leqslant \lambda_n\,\|x\|^2.$$

33. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
33.1 ➙ *Pour tout $x \in E$, il existe une famille orthogonale $(x_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}$ de vecteurs de E telle que*

$$x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$$

et que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\quad x_\lambda \in \operatorname{Ker}(u - \lambda\cdot\mathrm{I}_E).$$

33.2 En particulier,

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\cdot x_\lambda.$$

33.3 On en déduit que

$$\big(x\,\big|\,u(x)\big) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\,\|x_\lambda\|^2$$

et que

$$\big\|u(x)\big\|^2 = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda^2\|x_\lambda\|^2 \leqslant \Big(\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |\lambda|\Big)^2\,\|x\|^2.$$

Versions matricielles du théorème spectral

34.1 ➙ *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ soit diagonale.*

34.2 ➙ *Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top.A.P$ soit diagonale.*

34.3 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k.X_k^\top$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à ε_k et $X_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_k)$.

34.4 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de u. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{Y_k.Y_k^\top}{Y_k^\top.Y_k}$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à e_k et $Y_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(e_k)$.

Entraînement

35. Questions pour réfléchir

1. Si M est une matrice symétrique et s'il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^\top.M.P = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

alors $B = 0$ et les matrices A_1 et A_2 sont symétriques. (Par un calcul direct ou en appliquant **[27.5]** et **[27.1]**.)

2. *Suite de* **[27.5]** – On suppose que $\dim E = 2$ et que x est un vecteur propre unitaire de $u \in \mathcal{S}(E)$. Si y est un vecteur unitaire orthogonal à x, alors (x, y) est une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$, un endomorphisme auto-adjoint et $\mathscr{B}$, une base de vecteurs propres de u. Cette base est-elle nécessairement orthonormée ? Est-elle nécessairement orthogonale ?

4. Un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ est auto-adjoint si, et seulement si,

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

5. *Suite de* **[33.2]** –

$$\min_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(\,u(x)\mid x\,)}{\|x\|^2} = \lambda_1 \qquad \max_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{(\,u(x)\mid x\,)}{\|x\|^2} = \lambda_r$$

6. Un endomorphisme u de E est auto-adjoint si, et seulement si, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

7. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice diagonale Δ, combien existe-t-il de matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^\top.A.P = \Delta \quad ?$$

8. La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$$

n'est pas diagonalisable. Comparer avec **[34.2]**.

9. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, il existe des matrices $P_1, P_2, \dots, P_r$ dans $\mathfrak{M}_n(R)$ telles que $M \in \mathrm{Vect}(P_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$ avec

$$\begin{cases} \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, & P_k^2 = P_k = P_k^\top \\ \forall\, 1 \leqslant j < k \leqslant n, & P_jP_k = P_kP_j = 0 \end{cases}$$

36. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A.A^\top.A = I_n$. La matrice A est inversible et comme son inverse est symétrique, elle est elle-même symétrique et $A = I_n$.

37. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^\top = I_n$.
Comme $A = I_n - (A^\top)^2$, alors

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n$$

et comme 1 n'est pas valeur propre de A, alors la matrice A est symétrique.

38. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf

$$\forall\, 1 \leqslant i < n, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1.$$

La matrice A est diagonalisable et possède n valeurs propres deux à deux distinctes.

39. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, →**[62]**

$$\mathrm{Ker}\, A^\top.A = \mathrm{Ker}\, A, \qquad \mathrm{Im}\, A^\top.A = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp,$$
$$\mathrm{Ker}\, A.A^\top = (\mathrm{Im}\, A)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, A.A^\top = \mathrm{Im}\, A$$

et en particulier

$$\mathrm{rg}(A^\top.A) = \mathrm{rg}(A.A^\top) = \mathrm{rg}(A).$$

40. Soit E, un espace euclidien. Tout endomorphisme auto-adjoint $v \in \mathcal{S}(E)$ est continu : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \|v(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

41. Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, une colonne non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$A = I_n + \alpha U.U^\top$$

est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

42. Codiagonalisation d'endomorphismes auto-adjoints
Soient f et g, deux endomorphismes auto-adjoints.

1. S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g, alors $f \circ g = g \circ f$.

2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note g_λ, l'endomorphisme induit par restriction de g au sous-espace

$$E_\lambda^f = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

Tout vecteur propre de g_λ est aussi un vecteur propre de f. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.

43. Endomorphismes contractants [33.2]
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

43.1

$$\min_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|, \qquad \max_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

43.2 Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\forall\, x \in E, \quad \|P(u)(x)\| \leqslant \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |P(\lambda)|\,\|x\|.$$

43.3 Un endomorphisme auto-adjoint u est ***contractant*** :

$$\forall\, x \in E, \qquad \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1,1]$. Il est ***strictement contractant*** :

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \|u(x)\| < \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset \left]-1,1\right[$.

44. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives. On considère la matrice $K_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $K_n(i,j) = 1$ si $|i-j| = 1$ et $K_n(i,j) = 0$ sinon.

44.1 Il existe une base orthonormée $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

44.2 L'endomorphisme T de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad T(M) = K_n M + M K_n + M$$

est diagonalisable.

44.3 La famille $(V_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (U_i.U_j^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T.

45. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

On admet que $\mathrm{rg}(A - I_n) = 1$ et on note

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
2. Comme

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \|AX\| \leqslant \|X\|,$$

toutes les valeurs propres de A appartiennent au segment $[-1,1]$.

3. La matrice $B = I_n + A$ est inversible [**2.11**].
4. La suite de matrices $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R semblable à

$$E_{1,1} = \mathrm{Diag}(1,0,\dots,0).$$

46. L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note f, l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

46.1 Le sous-espace $F = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$ est stable par f et, avec

$$u_1 = (1,0,0) \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0,1,-1),$$

cet espace admet $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ comme base orthonormée.

46.2 On note g, l'endomorphisme de F induit par restriction de f. La matrice de g relative à la base $\mathscr{B}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

46.3 La matrice A est semblable à $\mathrm{Diag}(0,1,16)$.

47. Soient u et v, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Ils sont représentés par les matrices colonnes U et V dans la base canonique et on note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice

$$A = I_n + U.V^\top + V.U^\top$$

dans la base canonique.

47.1 Le réel λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur x non nul tel que

$$(\lambda - 1) \cdot x = (\, x \,|\, u \,) \cdot v + (\, x \,|\, v \,) \cdot u.$$

47.2 Si $n \geqslant 3$, alors le spectre de f est constitué des réels

$$1, \quad 1 + (\, u \,|\, v \,) - \|u\|\,\|v\|, \quad 1 + (\, u \,|\, v \,) + \|u\|\,\|v\|$$

et la matrice A est diagonalisable.

48. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de coefficients

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad a_{i,j} = i + j.$$

On note U et V, les matrices colonnes qui représentent les vecteurs

$$u = (1,1,\dots,1) \quad \text{et} \quad v = (1,2,\dots,n)$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

48.1 Comme $A = V.U^\top + U.V^\top$, la matrice A est diagonalisable, l'image de A est engendrée par U et V et le noyau de A est l'orthogonal de $\mathrm{Im}\, A$.

48.2 Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle, alors il existe deux réels a et b tels que

$$X = aU + bV.$$

48.3 Les valeurs propres non nulles de A sont

$$(\, u \,|\, v \,) \pm \|u\|\,\|v\|$$

et les sous-espaces propres correspondant sont les droites dirigées par les vecteurs $\|v\|\, U \pm \|u\|\, V$.

49. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout entier *impair* $p \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

50. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'indice p. Si les matrices A et $A^\top$ commutent, alors la matrice symétrique $A^\top.A$ est nilpotente et la matrice A est nulle [**39**].

51. L'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ étant muni du produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

on considère l'application f définie par

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' + XP' - P.$$

51.1 L'application f est un endomorphisme auto-adjoint de E et sa matrice relative à la base canonique de E est triangulaire supérieure. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe un vecteur propre P_k de f associé à la valeur propre

$$\lambda_k = \frac{k^2 + k - 2}{2}$$

et $\deg P_k = k$.

51.2 On note $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, la base orthonormée de E déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt. Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$f(T_k) = \sum_{i=0}^{k} \langle\, f(T_k) \,|\, T_i \,\rangle \cdot T_i = \langle\, T_k \,|\, f(T_k) \,\rangle \cdot T_k$$

et les polynômes P_k et T_k sont proportionnels.

52. Pour tout endomorphisme u d'un espace euclidien E, l'application $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint et il existe une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E telle que

$$\forall\, i \neq j, \quad \big(\, u(e_i) \,\big|\, u(e_j) \,\big) = 0.$$

53. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et W, l'ensemble des vecteurs propres unitaires de A (l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de sa norme euclidienne canonique). On pose

$$\forall\, X \in W, \qquad F_A(X) = \min_{u \in \mathbb{R}} \operatorname{tr}\big[(A - u \cdot X.X^\top)^2\big].$$

La fonction F_A atteint un minimum $m(A)$ sur W et

$$m(A) = \operatorname{tr}(A^2) - \rho(A^2)$$

où $\rho(A^2)$ est le ***rayon spectral*** de A^2, défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(M) = \max\{|\lambda|,\, \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}.$$

54. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

54.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est diagonalisable et ses valeurs propres vérifient

$$a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t).$$

54.2 Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\frac{-1}{t} < a(t) < 0 < 2 - \frac{2}{t} < b(t) < 2$$

donc $c(t) = t + o(1)$.

55. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = X^\top.S.X.$$

Les valeurs propres de S sont rangées par ordre croissant et comptées avec multiplicité :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

55.1 Pour tout vecteur unitaire $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \leqslant f(X) \leqslant \lambda_n.$$

55.2 Quels que soient X et Y dans $\mathbb{R}^n$,

$$2X^\top.S.Y = f\Big(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\Big) - f\Big(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\Big).$$

55.3 En notant $\mathcal{R}$, l'ensemble des couples (X, Y) de vecteurs unitaires et orthogonaux de $\mathbb{R}^n$,

$$\max_{(X,Y)\in\mathcal{R}} |X^\top.S.Y| = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2}.$$

56.
1. Toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables.
2. Parmi les matrices triangulaires supérieures strictes, seule la matrice nulle est diagonalisable.
3. Si V est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables, alors

$$\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

57. Polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$
Le polynôme minimal d'un endomorphisme auto-adjoint est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On peut démontrer ce fait sans recourir à la notion de spectre complexe. →**[28]**

57.1 Soit $f \in \mathcal{S}(V)$ où $\dim V = 2$.
1. Le polynôme caractéristique C_f de $f \in \mathcal{S}(V)$ est de la forme $(X-a)(X-b) - c^2$ et est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Le polynôme C_f admet une racine double si, et seulement si, f est une homothétie.

57.2 Soit P, un diviseur irréductible de degré 2 du polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$.
3. L'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif et, quel que soit le vecteur $x_0 \in \operatorname{Ker} P(u)$, ce n'est pas un vecteur propre de u.
4. Si x_0 est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} P(u)$, alors le sous-espace vectoriel
$$V = \operatorname{Vect}(x_0, u(x_0))$$
est un plan stable par u.
5. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u_V induit par restriction de u à V est le polynôme P.
6. Conclure.

III

Endomorphismes auto-adjoints positifs

58.1 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est* **positive** *lorsque*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.A.X \geqslant 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

58.2 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite* **définie positive** *lorsque*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad X^\top.A.X > 0.$$

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

59.1 ✍ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est* **positif** *lorsque*

$$\forall\, x \in E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x)\,\big) \geqslant 0.$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.

59.2 ✍ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathrm{L}(E)$ est* **défini positif** *lorsque*

$$\forall\, x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x)\,\big) > 0.$$

L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs de E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

60. Les définitions matricielles **[58]** et vectorielles **[59]** sont analogues et on peut préciser cette analogie. →**[5.73]**

60.1 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}$, une base orthonormée quelconque de E. Si u est positif (resp. défini positif), alors sa matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique et positive (resp. définie positive).

60.2 Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. S'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique et positive (resp. définie positive), alors u est un endomorphisme auto-adjoint positif (resp. défini positif).

61. Exemples et contre-exemples

61.1 $I_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$

61.2 Un projecteur orthogonal est un endomorphisme auto-adjoint **[25]** positif, mais n'est pas défini positif en général.

61.3 Une symétrie orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint qui n'est pas positif en général.

62. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $B = A^\top.A$ et $C = A.A^\top$ sont des matrices symétriques positives : →**[68]**

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.B.X = \|AX\|^2 \quad \text{et} \quad X^\top.C.X = \|A^\top.X\|^2.$$

Les matrices $A^\top.A$ et $A.A^\top$ sont définies positives si, et seulement si, la matrice A est inversible.

63. Caractérisations spectrales
On note $\Sigma^1 = [\|x\| = 1]$, la sphère unité de E et on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, dont les valeurs propres sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r.$$

63.1 *Suite de* [**33.2**] –

$$\lambda_1 = \min_{x\in\Sigma^1} \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big), \qquad \lambda_r = \max_{x\in\Sigma^1} \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big)$$

63.2 ➞ *Un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ est :*
1. *positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;*
2. *défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives.*

63.3 ➞ *Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il est positif et inversible.*
63.4 ➞ *Un endomorphisme auto-adjoint est défini positif si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x) \,\big) \geqslant \alpha\|x\|^2.$$

64. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^\top & D \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Alors $\det B > 0$.

Caractérisation des produits scalaires

65. On considère un espace euclidien E : sur cet espace est défini un produit scalaire de référence : $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ et une norme, notée $\|\cdot\|$, est associée à ce produit scalaire.
Nous allons nous intéresser aux autres produits scalaires définis sur E.

66. Représentation matricielle d'un produit scalaire
Soit φ, un produit scalaire quelconque sur E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E.
66.1 La ***matrice de Gram relative à la base*** $\mathscr{B}$ est la matrice Γ définie par [**5.8**]

$$\Gamma = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

66.2 Quels que soient les vecteurs x et y de E, respectivement représentés par les colonnes X et Y dans la base $\mathscr{B}$,

$$\varphi(x, y) = X^\top.\Gamma.Y.$$

66.3 La matrice de Gram Γ d'un produit scalaire est symétrique et définie positive.

$$\forall\, x \neq 0_E, \quad X^\top.\Gamma.X = \varphi(x, x) > 0.$$

66.4 Soit $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$. La matrice $\Gamma' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ s'exprime en fonction de la matrice $\Gamma = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ par la relation suivante :

$$\Gamma' = Q^\top.\Gamma.Q.$$

En particulier, si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée pour φ, alors

$$Q^\top.\Gamma.Q = I_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Gamma = P^\top.P$$

où $P = Q^{-1} = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$.

67. Produit scalaire associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive.
67.1 L'application

$$\psi_A = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
67.2 Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, il existe un produit scalaire φ sur E dont la matrice de Gram relative à $\mathscr{B}$ soit la matrice A.

68. Factorisation d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
68.1 Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = Q^\top.\Delta^2.Q$$

et une matrice P telle que

$$A = P^\top.P.$$

La matrice P est inversible si, et seulement si, la matrice A est définie positive. →[**62**]
68.2 Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué au produit scalaire ψ_A [**67.1**] prouve l'existence d'une matrice triangulaire inversible P telle que $A = P^\top.P$.
68.3 Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si, et seulement si, il existe un automorphisme u de E tel que

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \qquad \varphi(x, y) = \big(\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big).$$

Entraînement

69. Questions pour réfléchir
1. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $A^2 \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, alors les coefficients diagonaux de A sont tous positifs.
3. Un endomorphisme auto-adjoint u est positif si, et seulement si, pour tout $x \in E$, l'angle formé par le couple $\big(x, u(x)\big)$ est un angle aigu.
4. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?
5. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est une partie convexe de $L(E)$ et un ***cône positif*** :

$$\forall\, (\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^+(E), \quad \lambda \cdot u \in \mathcal{S}^+(E).$$

6. Un endomorphisme auto-adjoint défini positif est positif et inversible.
7. On suppose connue une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant r}} F_k.$$

On note $p_1, \dots, p_r$, les projections associées à cette décomposition de E.
7.a Les p_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont des projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \quad p_k \circ p_\ell = p_\ell \circ p_k = 0.$$

7.b Tout endomorphisme $u \in \text{Vect}(p_k, 1 \leqslant k \leqslant r)$ est auto-adjoint. Condition pour que u soit positif ? défini positif ?

70. Soient A et B, deux matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
1. La matrice $A + B$ est symétrique et positive.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

71. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La propriété

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A.X \geqslant 0$$

est vraie si, et seulement si, les valeurs propres de la matrice $B = A^\top + A$ sont toutes positives.

72. Matrice de Hilbert
La matrice de Gram relative à la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad (\, P \mid Q \,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est la matrice

$$H = \Big(\frac{1}{i+j+1}\Big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Cette matrice H est diagonalisable.
Pour $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, le scalaire $U^\top.H.U$ peut s'exprimer comme l'intégrale d'une fonction positive, donc les valeurs propres de H sont strictement positives.

73. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et comme l'application

$$\Big[X \mapsto (A^{-1}B).X\Big]$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire φ, la matrice $(A^{-1}B)$ est diagonalisable.

74. Soient A et B, deux matrices symétriques réelles. On suppose que la matrice B est définie positive.

74.1 L'application φ_B définie par

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_B(X, Y) = X^\top.B.Y$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

74.2
1. Il existe une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$$B = P.D.P^\top.$$

2. Il existe une matrice symétrique et inversible L telle que

$$B = L^\top.L.$$

74.3 Il existe une matrice symétrique réelle C telle que

$$AX = \lambda BX \iff C(LX) = \lambda(LX)$$

pour toute matrice colonne X.

74.4 Il existe une base $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire φ_B, et des scalaires réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad Ae_i = \lambda_i\, Be_i.$$

75. Base orthogonale commune [66.4]
Soit φ, un produit scalaire sur E. Notons $\varphi_0 = (\,\cdot \mid \cdot\,)$, le produit scalaire de référence.

75.1 Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour φ_0, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

75.2 Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telle que

$$Q^\top.\Gamma.Q = \Delta.$$

75.3 La matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une base $\mathscr{B}$. Comme $\to$**[66.4]**

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Delta,$$

alors la base $\mathscr{B}$ est simultanément une base orthonormée pour φ_0 et une base orthogonale pour φ.

76. Décomposition spectrale d'une matrice symétrique
Soit $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, le spectre d'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
1. Il existe des matrices $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ telles que

$$Q(A) = \sum_{k=1}^{r} Q(\lambda_k) P_k^\top.P_k$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. En particulier, la matrice A est une combinaison linéaire de matrices symétriques positives :

$$A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k^\top.P_k.$$

2. Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{k=1}^{r} \|P_k X\|^2 = \|X\|^2.$$

77.1 Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A).$$

77.2 Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det M|^2 \leqslant \Big(\frac{\mathrm{tr}(M^\top.M)}{n}\Big)^n$$

78. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif
Tout endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$ est une ***racine carrée*** de $u \in \mathcal{S}^+(E)$.
1. On suppose qu'il existe une racine carrée v de u.

1.a Si F_k est le sous-espace propre de v associé à la valeur propre μ_k, alors F_k contenu dans un sous-espace propre de u. À quelle valeur propre de u ce sous-espace est-il associé ?

1.b Chaque sous-espace propre de v est aussi un sous-espace propre de u.

2. Il existe une, et une seule, racine carrée de u.
3. Interprétation matricielle.

79. Factorisation de Cartan
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top.A$ **[78]** et une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OS.$$

Cette factorisation, analogue de la représentation polaire des nombres complexes, est unique.

80. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de la matrice B est égal à m.

80.1 L'entier n est supérieur à l'entier m.

80.2 Le noyau de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est réduit à la colonne nulle. La matrice C est-elle inversible ?

81.1 La matrice S est symétrique et définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $S = P.P^\top$ **[68]**.

81.2 Quelles que soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice ST est semblable à une matrice symétrique réelle et donc diagonalisable.

81.3 Si A est diagonalisable, alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S.$$

Étudier la réciproque.

82. Double produit vectoriel
Soit $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur unitaire. Comme

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \big(\, (a \wedge x) \wedge a \,\big|\, y \,\big) = (\, a \wedge x \mid a \wedge y \,)$$

l'endomorphisme $f = [x \mapsto (a \wedge x) \wedge a]$ est auto-adjoint, positif mais pas défini positif.
Reconnaître f à l'aide de la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) = (\, u \mid w \,) \cdot v - (\, u \mid v \,) \cdot w.$$

83. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique.

1. Quelle que soit la matrice colonne X,

$$X^\top.A.X = 0.$$

2. Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la matrice $A + B$ est inversible.

84. Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients $A_{i,j}$ sont tous différents de 0 et on considère la matrice

$$B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \Big(\frac{1}{A_{i,j}}\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

84.1 Si rg $A = 1$, alors $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

84.2 Si rg $A \geqslant 2$, alors il existe deux indices $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

Le déterminant de la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{i,i} & b_{i,j} \\ b_{j,i} & b_{j,j} \end{pmatrix}$$

est strictement négatif, donc il existe un couple $(x_i, x_j) \neq (0, 0)$ tel que

$$\begin{pmatrix} x_i & x_j \end{pmatrix} B_0 \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} < 0$$

et la matrice symétrique B n'est pas positive.

85. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont les valeurs propres sont strictement positives. On les note :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

et on pose $\kappa_A = \sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$.

85.1 Il existe une matrice orthogonale P telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}A^{-1}P$ soient diagonales.

85.2 Quels que soient les réels $y_1, \dots, y_n$,

$$\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} y_i^2\Big)$$

donc

$$\|X\|^2 \leqslant [(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X)]^{1/2}$$

pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

85.3 En posant $Y = P^\top.X = (y_1, \dots, y_n)$, on a :

$$(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X) = \kappa_A^2 \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2\Big)$$

donc

$$\begin{aligned}[(X^\top.A.X)(X^\top.A^{-1}.X)]^{1/2} &\leqslant \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^n \Big[\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\Big] y_i^2 \\ &\leqslant \frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2} \|X\|^2.\end{aligned}$$

IV

Formes quadratiques

86. Convention
On identifie ici les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en ne distinguant pas le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui représente x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

87.1 Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \qquad X^\top.A.X = 0,$$

alors A est la matrice nulle.

87.2 Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \qquad X^\top.A.X = 0,$$

alors A est antisymétrique.

87.3 Si A et B sont deux matrices symétriques réelles telles que

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad X^\top.A.X = X^\top.B.X,$$

alors $A = B$.

87.4 ✍ *Une application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une* **forme quadratique** *sur $\mathbb{R}^n$ lorsqu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \qquad q(X) = X^\top.A.X.$$

87.5 ✍ *La forme quadratique q est dite* **positive** *(resp.* **définie positive***) lorsque la matrice symétrique A est positive (resp. définie positive).*
Elle est dite **négative** *(resp.* **définie négative***) lorsque la matrice symétrique $-A$ est positive (resp. définie positive).*

88. Exemples

88.1 La forme quadratique $[(u, v, w) \mapsto u^2 + 3v^2 + 2w^2]$ est définie positive.

88.2 La forme quadratique $q = [(u, v) \mapsto u^2 - 2v^2]$ n'est ni positive, ni négative.

88.3 La forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} q(u, v, w) &= 5u^2 + 2v^2 + w^2 - 2uv + 2uw + 2vw \\ &= (u + v + w)^2 + (2u - v)^2 \end{aligned}$$

est positive, sans être définie positive.

88.4 La forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(u, v, w) = (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2$$

est positive, sans être définie positive : $q(u, v, w) = 0$ si, et seulement si, $u = v = w$.

88.5 La forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{x} = (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad q(\boldsymbol{x}) &= u^2 + 6uv + v^2 \\ &= (u + 3y)^2 - 8v^2 \end{aligned}$$

n'est ni positive, ni négative et il existe des vecteurs $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tels que $q(\boldsymbol{x}) = 0$.

88.6 La forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \quad q(\boldsymbol{x}) = uv + vw + wu$$

est représentée par la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Elle n'est ni positive, ni négative.

89. Soit E, un espace euclidien.

89.1 Si $u \in \mathcal{S}(E)$ vérifie

$$\forall\, x \in E, \qquad (\, x \mid u(x)\,) = 0,$$

alors u est l'endomorphisme nul.

89.2 ✍ *Une application* $q : E \to \mathbb{R}$ *est une* **forme quadratique** *sur* E *lorsqu'il existe un endomorphisme auto-adjoint* $u \in \mathcal{S}(E)$ *tel que*

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = (\,x \,|\, u(x)\,).$$

89.3 ✍ *La forme quadratique* q *est dite* **positive** *(resp.* **définie positive***) lorsque l'endomorphisme* $u \in \mathcal{S}(E)$ *est positif (resp. défini positif).*
Elle est dite **négative** *(resp.* **définie négative***) lorsque la forme quadratique* $-q$*, associée à l'endomorphisme* $-u \in \mathcal{S}(E)$*, est positive (resp. définie positive).*

90. Exemples
Soit E, un espace euclidien.

90.1 Pour tout endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$, l'application q définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \big\|u(x)\big\|^2$$

est une forme quadratique positive sur E. Elle est définie positive si, et seulement si, l'endomorphisme u est injectif.

90.2 Pour tout endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$, l'application q définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = (\,x \,|\, u(x)\,)$$

est la forme quadratique sur E associée à $(u + u^*)/2 \in \mathcal{S}(E)$.

90.3 Soit q, une forme quadratique. Pour tout endomorphisme u de E, l'application $q \circ u$ est une forme quadratique.

90.4 Quels que soient les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de E, les applications

$$\Big[\boldsymbol{x} \mapsto (\,\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{x}\,)^2\Big] \quad \text{et} \quad \big[\boldsymbol{x} \mapsto (\,\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{x}\,) \cdot (\,\boldsymbol{w} \,|\, \boldsymbol{x}\,)\big]$$

sont des formes quadratiques sur E.

90.5 L'application

$$q = \left[P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Est-elle positive ?

90.6 L'application q définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$q(M) = \mathrm{tr}(M^\top M) + (\mathrm{tr}\, M)^2$$

est une forme quadratique définie positive.

91. Décomposition canonique en carrés
On considère la forme quadratique q, associée à un endomorphisme auto-adjoint u de E.

91.1 Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de valeurs propres de u et, en notant λ_k, la valeur propre réelle associée au vecteur propre e_k,

$$\forall\, x \in E, \qquad q(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k\,(\,e_k \,|\, x\,)^2.$$

91.2 Cette décomposition permet de comparer la forme quadratique q à la norme euclidienne sur E.

$$\forall\, x \in E, \quad \Big(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k\Big) \cdot \|x\|^2 \leqslant q(x) \leqslant \Big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k\Big) \cdot \|x\|^2$$

92. Forme quadratique décomposée en carrés
Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, des formes linéaires linéairement indépendantes sur E. L'application $\psi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \big[\varepsilon_k(x)\big]^2$$

est une forme quadratique sur E. Elle est positive si, et seulement si, tous les α_k sont positifs [**1.44**].

93. La définition [**89.2**] vaut également dans le cas où la dimension de l'espace E est infinie.

93.1 On considère l'application q définie sur $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ par

$$\forall\, f \in E, \quad q(f) = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application q est une forme quadratique sur E.
2. Existe-t-il une forme linéaire T sur E telle que $q = T^2$?
3. S'il existe des formes linéaires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ linéairement indépendantes telles que

$$q \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_n^2),$$

alors $\mathrm{Ker}\,\varepsilon_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\,\varepsilon_n = \{0_E\}$.
On sait [**1.44**] qu'il existe une famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i,k \leqslant n, \quad \varepsilon_i(u_k) = \delta_{i,k}.$$

Commenter.

93.2 Pour toute fonction $h \in E$, l'application définie par

$$\forall\, f \in E, \quad q_h = \int_0^1 f^2(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme quadratique sur E. Condition sur h pour que φ_h soit positive ? définie positive ?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

94. Exemples et contre-exemples
1. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints ? non auto-adjoints ?
2. Exemples d'endomorphismes auto-adjoints positifs ? définis positifs ? non positifs ?
3. Exemple d'endomorphisme u tel que $\det u = \pm 1$ et qui n'est pas une isométrie.
4. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (\,P \,|\, Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors $\|X^n\|$ tend vers 0 alors que la suite des fonctions $[t \mapsto t^n]$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Comparer avec [**6**] et avec [**5.150**].

95. Méthodes
1. Comment déterminer l'adjoint d'un endomorphisme ?
2. Comment vérifier qu'une matrice est orthogonale ?
3. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$.
3.a Comment déterminer si A est une matrice de rotation ?
3.b Comment déterminer un plan stable par A ?
4. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une isométrie ?
5. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une projection orthogonale ? une symétrie orthogonale ?
6. Un endomorphisme u est représenté par la matrice A dans une base $\mathscr{B}$ (qui n'est pas nécessairement une base orthonormée).
6.a Comment déterminer si u est auto-adjoint ?
6.b Comment déterminer si u est une isométrie ?

Approfondissement

96. Il existe une matrice $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\, M = a$ et $\det M = b$ si, et seulement si, $a^2 \geqslant 4b$.

97. Caractérisation des homothéties
On considère un espace euclidien E.
1. Si tout hyperplan de E est stable par u, alors l'adjoint u^* de u est une homothétie [**9.66**], donc u est une homothétie.

2. S'il existe un entier $2 \leqslant r < n$ tel que tout sous-espace de dimension r soit stable par u, alors tout hyperplan de E est stable par u.

98. Soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

98.1 S'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad A_k \in \mathbb{R}[A],$$

alors les matrices A_k commutent deux à deux.

98.2 Si les matrices A_k commutent deux à deux, alors **[108]** il existe une matrice orthogonale P telle que $P^\top.A_k.P$ soit diagonale pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.
Il existe donc des polynômes $Q_1, \ldots, Q_p$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \qquad A_k = Q_k(A)$$

où $A = P.\operatorname{Diag}(1, 2, \ldots, n).P^\top \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

99. Endomorphismes anti-symétriques
L'endomorphisme f d'un espace euclidien E est dit ***anti-symétrique*** lorsque

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big(f(x) \,\big|\, y\big) = -\big(x \,\big|\, f(y)\big).$$

99.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. f est anti-symétrique.
2. Pour tout $x \in E$, $\big(f(x) \,\big|\, x\big) = 0$.
3. La matrice A qui représente u dans une base orthonormée est anti-symétrique : $A^\top = -A$.

99.2 On suppose ici que E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

4. Pour tout $u \in E$, l'application $f_u = [x \mapsto u \wedge x]$ est anti-symétrique.
5. Pour tout endomorphisme anti-symétrique f, il existe un, et un seul, vecteur $u \in E$ tel que $f = f_u$.
6. L'endomorphisme f_u est diagonalisable si, et seulement si, $u = 0$.
7. Il existe **[82]** une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f^2. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f^2 ?

99.3 Soit $f \in L(E)$, un endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien de dimension quelconque.

8. Si F est un sous-espace stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par F.
9. Le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

$$E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine du polynôme minimal de f, considéré comme un polynôme à coefficients complexes.

10.a Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de u dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, alors il existe un vecteur-colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et

$$|\lambda|^2\,(\overline{X})^\top.X = (\overline{AX})^\top.(AX) = -\lambda^2\,(\overline{X})^\top.X.$$

10.b Qu'en conclure si $\lambda \in \mathbb{R}$? Et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

11. Le rang de f est pair et $\det(f) \geqslant 0$.
12. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

100. Décomposition QR

100.1 L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.

100.2 Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. L'application

$$\varphi = \Big[(X, Y) \mapsto X^\top.(A^\top.A).Y\Big]$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique de E est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

2. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E, orthonormée pour φ, telle que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ appartienne à T_n^+.
3. Il existe une matrice $R \in T_n^+$ telle que $A^\top.A = R^\top.R$.
4. Il existe un, et un seul, couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que $A = QR$.

101. Soient E, un espace euclidien et u, un endomorphisme trigonalisable de E.

101.1 Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

101.2 L'adjoint u^* de u est un polynôme en u si, et seulement si, u est auto-adjoint.

102. Une forme quadratique q telle que $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$ est définie positive ou définie négative.

Pour aller plus loin

103. Questions pour réfléchir

1. Soit $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$, un espace préhilbertien. Pour tout vecteur $a \in E$, la forme linéaire $\varphi_a = [x \mapsto (a \,|\, x)]$ est continue. Le théorème de Riesz **[5.66.3]** est-il encore vrai en dimension infinie ?
2. Si E est un espace réel de dimension finie et si $u \in L(E)$ est diagonalisable, alors il existe un produit scalaire sur E pour lequel u est un endomorphisme auto-adjoint.
3. *Suite de* **[6]** – La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
4. Étudier la structure du ***cône isotrope*** de $u \in L(E)$:

$$C_0(u) = \big\{x \in E \;:\; \big(x \,\big|\, u(x)\big) = 0\big\}$$

et comparer $C_0(u)$ au noyau de u.

5. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.

5.a Existe-t-il une structure euclidienne sur E pour laquelle u est une isométrie ?

5.b Étudier le cas où u est une symétrie.

104. Soit u, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. Quels que soient x, y et z dans $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\big(u(x), y, z\big) + \operatorname{Det}\big(x, u(y), z\big) + \operatorname{Det}\big(x, y, u(z)\big)&\\ = \operatorname{tr}(u) \cdot \operatorname{Det}(x, y, z)&.\end{aligned}$$

2. D'après **[5.67.3]**, il existe un, et un seul, endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge y + x \wedge u(y).$$

105. Étude d'une rotation en dimension 3 (variante de [17])
Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère une rotation u autour du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$.

105.1 Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de E (obtenue en complétant le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$),

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

105.2 D'après **[16]**,

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad (u - u^{-1})(\boldsymbol{x}) = (2\sin\theta) \cdot (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$

105.3 Si $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est la matrice relative à une base orthonormée directe $\mathscr{B}_0$ de la rotation u, alors il existe trois réels (p, q, r) tels que

$$\frac{1}{2}(A - A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \cdot \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Comparer avec **[17]**.

106. Structure euclidienne sur E^*
La structure euclidienne de E permet de définir une structure euclidienne naturelle sur son espace dual $E^* = \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$.
Pour tout $a \in E$, on pose $\varphi_a = [x \mapsto (\, a \mid x \,)]$.

1. Il existe un, et un seul, produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E^* tel que

$$\forall\, (a,b) \in E \times E, \quad \langle\, \varphi_a \mid \varphi_b \,\rangle = (\, a \mid b \,)$$

et l'application $[a \mapsto \varphi_a]$ est une isométrie de $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$ sur $\big(E^*, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$.

2. Une base $\mathscr{B}$ de E est une base orthonormée pour $(\cdot \mid \cdot)$ si, et seulement si, sa base duale $\mathscr{B}^*$ est une base orthonormée de E^* pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

107. On considère un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$.

1. Si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint défini positif u tel que

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \langle\, x \mid y \,\rangle = \big(\, x \mid u(y) \,\big).$$

2. Soit v, un endomorphisme de E auto-adjoint pour $(\cdot \mid \cdot)$. Alors v est auto-adjoint pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ si, et seulement si, il commute à l'endomorphisme u : $u \circ v = v \circ u$.

108. Codiagonalisation de matrices symétriques [9.198]
Soit $(A_i)_{i \in I}$, une famille de matrices symétriques réelles de même taille.
Il existe une matrice inversible P telle que toutes les matrices

$$P^{-1} A_i P$$

soient diagonales si, et seulement si, les matrices A_i commutent deux à deux.

109. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

109.1 Il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ et

$$\operatorname{tr}(PA) = \langle\, PR \mid R \,\rangle \leqslant \operatorname{tr} A$$

pour toute matrice orthogonale P.

109.2 Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall\, P \in O_2(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(PA) \leqslant \operatorname{tr} A.$$

Alors la matrice A est symétrique.

109.3 Si

$$\forall\, P \in O_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(PA) \leqslant \operatorname{tr} A,$$

alors la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et toutes ses valeurs propres sont positives.

110. Factorisation d'une isométrie
On considère un espace euclidien $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$.
Toute isométrie de E est décomposable en un nombre fini de réflexions et le nombre de réflexions qui apparaissent dans cette factorisation peut être choisi inférieur à $\dim E$.

110.1 Soit $f \in O(E)$, tel que $f \neq \mathrm{I}_E$. Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) \neq u$ et on pose $v = f(u)$.

1. Il existe une réflexion r telle que $r(u) = v$.
2. Pour tout $x \in E$ tel que $f(x) = x$,

$$(\, x \mid u - v \,) = 0 \quad \text{et} \quad r(x) = x.$$

3. $$\dim \operatorname{Ker}(r \circ f - \mathrm{I}_E) > \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$$

110.2 On construit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'isométries de E en posant $f_0 = f$ et, pour tout $p \geqslant 1$,

— si $f_{p-1} = \mathrm{I}_E$, alors $f_p = \mathrm{I}_E$;

— sinon, alors $f_p = r_p \circ f_{p-1}$, où r_p est une réflexion telle que

$$\dim \operatorname{Ker}(f_p - \mathrm{I}_E) > \dim \operatorname{Ker}(f_{p-1} - \mathrm{I}_E).$$

Il existe un entier $p \leqslant \dim E$ tel que $f_p = \mathrm{I}_E$. Que peut-on en déduire sur f ?

110.3 Applications

4. Décomposition d'une rotation du plan en produit de deux réflexions.
5. Classification géométrique des isométries de l'espace en fonction du sous-espace fixe (identité, réflexions, rotations, composées d'une rotation et d'une réflexion qui commutent).

111. Matrices orthosemblables
La matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthosemblable*** à la matrice A lorsque

$$\exists\, P \in O_n(\mathbb{R}), \quad B = P^\top.A.P.$$

1. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Deux matrices orthosemblables sont semblables. La réciproque est-elle vraie ?
3. Si A est symétrique et si B est orthosemblable à A, alors B est symétrique.
4. Que dire d'une matrice orthosemblable à une matrice diagonale ?
5. Interpréter géométriquement la notion de matrices orthosemblables.

112. Réduction simultanée de deux formes quadratiques

112.1 Aspects théoriques
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ représenté par la matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base canonique. On considère une forme quadratique q, représentée par la matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique.

1. Il existe une matrice diagonale D_1 et une matrice P_1 telles que

$$P_1^\top.P_1 = I_n \quad \text{et} \quad B = P_1^\top.D_1.P_1.$$

2.a Il existe un, et un seul, endomorphisme auto-adjoint u de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle\, x \mid u(x) \,\rangle.$$

2.b La matrice de u relative à la base canonique est $A^{-1}B$.

2.c Il existe une matrice diagonale D_2 et une matrice P_2 telles que

$$P_2^\top.P_2 = A \quad \text{et} \quad B = P_2^\top.D_2.P_2.$$

En outre, $A^{-1}.B = P_2^{-1}.D_2.P_2$. Discuter l'unicité des matrices P_2 et D_2.

2.d La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ représentée par la matrice P_2^{-1} dans la base canonique est orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, \varepsilon_i \mid u(\varepsilon_j) \,\rangle = 0.$$

112.2 Exemples
L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique $(\cdot \mid \cdot)$.

3. Les formes quadratiques définies par

$$\forall\, \boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} q_1(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2xy + 5y^2 \\ q_2(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

sont définies positives.

4. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

est semblable à $\operatorname{Diag}(1, 1/2)$.

5. Il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$, orthonormée pour $(\cdot \mid \cdot)$, telle que

$$q_1(\boldsymbol{x}) = (3 - \sqrt{5})\,(\, \varepsilon_1 \mid \boldsymbol{x} \,)^2 + (3 + \sqrt{5})\,(\, \varepsilon_2 \mid \boldsymbol{x} \,)^2$$

pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Par suite,

$$\min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{q_1(\boldsymbol{x})}{(\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \,)} = 3 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{q_1(\boldsymbol{x})}{(\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \,)} = 3 + \sqrt{5}.$$

6. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, le produit scalaire associé à q_1.

6.a Les vecteurs $\boldsymbol{u} = (1,0)$ et $\boldsymbol{v} = (-1/2, 1/2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

6.b La forme quadratique définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad q_2(\boldsymbol{x}) = x^2 + 2xy + 3y^2$$

est représentée par la matrice $\mathrm{Diag}(1, 1/2)$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, donc

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad q_2(\boldsymbol{x}) = \langle\, \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{x} \,\rangle^2 + \frac{1}{2} \langle\, \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{x} \,\rangle^2$$

et

$$\min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{q_2(\boldsymbol{x})}{q_1(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{q_2(\boldsymbol{x})}{q_1(\boldsymbol{x})} = 1.$$

113. L'application $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k^2$$

(avec $1 \leqslant n < n + p \leqslant d$) est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$. Sa matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est égale à

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-(n+p)}).$$

Tout sous-espace G dont la dimension est strictement supérieure à n rencontre le sous-espace

$$F_0 = \mathrm{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_d),$$

au sens où $\dim(F_0 \cap G) \geqslant 1$.
Si F est un sous-espace tel que la restriction de q à F soit définie positive :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in F \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \quad q(\boldsymbol{x}) > 0$$

alors $\dim F \leqslant n$.

114. L'espace $\mathbb{R}^d$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on note $S^1(F)$, la sphère unité de chaque sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{R}^d$:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \qquad \boldsymbol{x} \in S^1(F) \iff \begin{cases} \boldsymbol{x} \in F \\ \|\boldsymbol{x}\| = 1 \end{cases}.$$

On considère une famille croissante de nombre réels :

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_d.$$

1. L'application $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad q(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{d} a_k x_k^2$$

est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^d$.

2.

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(\boldsymbol{x}) = a_1 \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in S^1(\mathbb{R}^d)} q(\boldsymbol{x}) = a_d$$

3. On note V_n, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension $1 \leqslant n \leqslant d$.

3.a →**[113]**

$$\forall\, F \in V_n, \quad a_n \leqslant \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) \leqslant a_d$$

3.b Pour tout $1 \leqslant n \leqslant d$,

$$\min_{F \in G_n} \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) = a_n \quad \text{et} \quad \max_{F \in G_n} \sup_{\boldsymbol{x} \in S^1(F)} q(\boldsymbol{x}) = a_d.$$

115. Signature d'une forme quadratique
On se donne des formes linéaires $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ linéairement indépendantes dans E et des scalaires réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$. On considère la forme quadratique Q définie par

$$\forall\, x \in E, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \big[f_k(x)\big]^2 - \sum_{k=1}^{q} \beta_k \big[g_k(x)\big]^2.$$

1. Il existe un sous-espace F_+ de dimension p tel que la restriction de Q à F_+ soit une forme quadratique définie positive.
2. Si $\dim F > p$, alors il existe $x \in F$, non nul, tel que $Q(x) \leqslant 0$.
3. Soit A, la matrice de Q relative à une base $\mathscr{B}$. Alors l'entier p (resp. l'entier q) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de A.
4. Relier le couple (p, q) au rang de Q.
5. Que dire du couple (p, q) lorsque Q est positive ? définie positive ? négative ? définie négative ? dégénérée ?

Le couple (p, q) est la ***signature*** de la forme quadratique Q.